На правах рукописи

Богданова Рада Александровна

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск — 2014

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Горно-Алтайский государственный университет», на кафедре физики и методики преподавания физики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Михайличенко Геннадий Григорьевич

Официальные оппоненты:
Родионов Евгений Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет», кафедра математического анализа, профессор
Бухтяк Михаил Степанович, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра геометрии, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск

Защита состоится 27 июня 2014 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.267.21, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, корпус 2, ауд. 304.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Автореферат разослан «____» апреля 2014 года.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
http://www.tsu.ru/content/news/announcement_of_the_dissertations_in_the_tsu.php

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук Малютина Александра Николаевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящей работе осуществлено развитие аналитических методов классификации некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий. На *феноменологическую симметрию* в геометрии впервые особое внимание обратил Ю.И. Кулаков [1], сделав ее основным принципом *теории физических структур*[2]. Феноменологически симметричные геометрии представляют собой синтез двух классических подходов к построению геометрии: групповой и метрический, которые на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Ф. Клейна, А. Пуанкаре, С. Ли, А. Кэли и др.) являются предметом и инструментом исследования в теории функций, представлений групп Ли, римановой геометрии и других разделов математики. Сущность феноменологической симметрии состоит в том, что в n-мерном пространстве между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ произвольных точек имеется функциональная связь[3]. Первоначально феноменологическая симметрия была установлена при анализе строения второго закона Ньютона в механике и закона Ома в электродинамике[4], а затем перенесена в геометрию. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы"Ф. Клейна[5], согласно которой геометрия есть теория инвариантов некоторой группы преобразований данного многообразия.

Начиная с 60-ых годов XX века наряду с такими направлениями как метрическая геометрия или "геометрия расстояний"(представленная в фундаментальных трудах H. Busemann[6], А. Д. Александрова[7], L. M. Blumenthal[8],

[1]Кулаков, Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. – 1970. –Т.193, № 5. – С.985-987.

[2]см. Кулаков, Ю.И. О теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – Л.: Наука, 1983. – Т.127. – С.103-151.; Кулаков, Ю.И. Теория физических структур / Ю.И. Кулаков. – М.: Доминико, 2004.

[3]см. Берже, М. Геометрия: Пер. с франц. Т1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.; Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953; Кулаков, Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. – 1970. –Т.193, № 5. – С.985-987; Кулаков, Ю.И. Теория физических структур / Ю.И. Кулаков. – М.: Доминико, 2004.

[4]см. Кулаков, Ю.И. Элементы теории физических структур /Ю.И. Кулаков. Новосибирск: НГУ, 1968; Кулаков, Ю.И. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику / Ю.И. Кулаков, Ю.С. Владимиров, А.В. Карнаух. – М.: Архимед, 1992.

[5]Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") / Ф. Клейн. // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С. 402-434.

[6]Busemann H. Recent Synthetic Differential Geometry / H. Busemann.– Berlin – Heidelberg – New York : Springer-Verlag, 1970; Busemann H. Spaces with Distinguished Geodesics / H. Busemann, B.B. Phadke. - New York - Basel - Marsel : Dekker Inc., 1987.

[7]Александров, А.Д. Обобщенные римановы пространства / А.Д. Александров, В.Н. Берестовский, И.Г. Николаев // Успехи математических наук. – 1986. – Т. 41, вып. 3. – С. 3-44.

[8]Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.

Ю. Г. Решетняка[9], Ю. Д. Бураго[10], B. B. Phadke[11], W. Ballmann[12], A. Papadopoulos [13], M. Bridson, A. Haefliger [14] и их учеников), геометрия постоянной кривизны или максимальной подвижности (представленная в работах Д.В. Алексеевского, Э. Б. Винберга, А. С. Солодовникова[15]), появилась феноменологически симметричная геометрия в рамках более общей концепции – теории физических структур, которая в настоящее время активно развивается Новосибирской (Ю. И. Кулаков, А. А. Симонов и др.), Горно-Алтайской (Г. Г. Михайличенко, В. А. Кыров и др.) и Московской (Ю. С. Владимиров, А. В. Карнаухов и др.) научными школами. Метрические (К. Менгер, L.M. Blumenthal[16]) и групповые (Г. Гельмгольц[17], Ф. Клейн[18], А. Пуанкаре [19]) задания геометрии оказываются в известном смысле эквивалентными, что отмечено Г.Г. Михайличенко и G.P. Wene в их работах [20]. То есть феноменологически симметричные геометрии наделены групповой симметрией в смысле Клейна, о которой говорится в "Эрлангенской программе"(1873 г.). В частности, феноменологически симметричные n-мерные геометрии – это геометрии Клейна с максимальной подвижностью, равной $n(n+1)/2$, в которых имеется функциональная связь между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n+2$ точек.

Заметим, что в работах по геометрии расстояний (см. L.M. Blumenthal, К. Менгера) было установлено, что если метрическое пространство таково, что для любой четверки точек этого пространства шесть чисел – расстояний между ними удовлетворяет тому же тождеству, что и расстояния между

[9]Решетняк, Ю.Г. Двумерные многообразия ограниченной кривизны / Ю. Г. Решетняк // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. – Т. 70 |Геометрия - 4|. – 1989. – С. 5-189.

[10]Бураго Ю.Д. Введение в риманову геометрию / Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. – СПб. : Наука, 1994. – 318 с.

[11]Busemann H. Spaces with Distinguished Geodesics / H. Busemann, B.B. Phadke. - New York - Basel - Marsel : Dekker Inc., 1987.

[12]Ballmann W. Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature. GMV Seminar 25 / W. Ballmann. - Basel : Birkhauser Verlag, 1995.

[13]Papadopoulos A. Metric spaces convexity and nonpositive curvature / A. Papadopoulos. - Zurich : European Math. Society, 2005.

[14]Bridson M. R. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A / M. R. Bridson, A. Haefliger // Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. - Berlin : Springer-Verlag. – 1999. – V. 319.

[15]Алексеевский, Д.В. Геометрия пространств постоянной кривизны. / Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Т. 29 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». – М.: 1988. – С. 5 — 146

[16]Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.

[17]Гельмгольц, Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С.366-388.

[18]Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") / Ф. Клейн. // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С. 402-434.

[19]Пуанкаре, А. Об основных гипотезах геометрии / А. Пуанкаре. // Об основаниях геометрии. - М., 1956. – С. 388-398.

[20]см. Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288; Wene, G.P. Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras // Hadronic J., 1985. – Vol.8, №2. – P.63-74.

четырьмя точками на евклидовой плоскости, то при некоторых естественных дополнительных ограничениях это пространство совпадает с обычной евклидовой плоскостью. Аналогичный результат верен для сферы и плоскости Лобачевского.

Существенным отличаем феноменологической симметрии от геометрии расстояний является то, что вид зависимости между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n+2$ точек не предполагается заранее известным.

Классификация и исследование феноменологически симметричных геометрий является одной из главных задач теории физических структур. Их решение используется в современной теоретической физике для обоснования размерности и метрики пространства-времени, развития нового подхода к описанию физических взаимодействий и их объединения, формулировки нового взгляда на спинорные свойства элементарных частиц[21]. Аналитические методы используются при решении *специальных функциональных и функционально-дифференциальных уравнений*, что представляет собой одну из давних проблем математического анализа, которой уделяли большое внимание многие математики (в их числе Эйлер, Даламбер, Гаусс, Коши, Абель и Дарбу), разрабатывая методы их решения.

Двумерные феноменологически симметричные геометрии[22] строятся на двумерном дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}_2$, класс гладкости которого предполагается достаточным для всех дальнейших построений. Точки этого многообразия $\mathfrak{M}_2$ удобно, в целях сокращения записи обозначать строчными буквами латинского алфавита: i, j, k и т.д. Текущая точка $i \in \mathfrak{M}_2$ задается локальными координатами x_i, y_i. В основе построения двумерной геометрии лежит отображение $f : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^s$, где $\mathfrak{S}_f \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющее паре точек s действительных чисел. В случае $s = 1$ отображение f есть скалярная функция, называемая *метрической функцией*. В случае $s = 2$ отображение f является вектор-функцией, а геометрия задаваемая этой функцией называется *двуметрической*.

Например, координатное представление метрической функции f в случае $s = 1$ для двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ имеет следующий вид:

$$f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

[21]см. Владимиров, Ю.С. Описание взаимодействий в рамках теории физических структур / Ю.С. Владимиров. // Вычислительные системы. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. – Вып. 125. – С. 61–87; Владимиров, Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений / Ю.С. Владимиров. – М.: изд. МГУ, 1996. – 262 с; Владимиров, Ю.С. Метафизика / Ю.С. Владимиров. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 568 с.

[22]см. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. –1981. – Т.260, №4, С.803-80; Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Барнаул: БГПУ, 2004. – 132 с.; Mikhaylitchenko, G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981. – T.293. Serie 1. – P.529- 531.

и аксиомы, которым она удовлетворяет, следующие[23]:

Аксиома 2.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множество.

Аксиома 2.1.2. Функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 2.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2^3$ множества троек $\langle i,k,l\rangle$ и $\langle k,l,j\rangle$ локальное координатное представление функции f удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f(i,k),f(i,l))}{\partial(x_i,y_i)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f(k,j),f(l,j))}{\partial(x_j,y_j)} \neq 0.$$

Метрическую функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы **2.1.3** будем называть *невырожденной метрической функцией.*

На основе функции f строится отображение $F : \mathfrak{S}_F \to \mathbb{R}^6$, сопоставляющее четверке $\langle i,j,k,l\rangle$ из $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}_2^4$ точку $z = (f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)) \in R^6$, где область его определения $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^4$ подмножество.

Аксиома 2.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждой четверки $\langle i,j,k,l\rangle$ которой и некоторой ее окрестности $U(\langle i,j,k,l\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \to R$, определенная в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $F(\langle i,j,k,l\rangle)$, что в ней $grad\Phi \neq \vec{0}$ и множество $F(U(\langle i,j,k,l\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)) = 0$$

для всех четверок из $U(\langle i,j,k,l\rangle)$.

Одним из определяющих свойств *метрической функции* является ее инвариантность относительно некоторой группы Ли преобразований[24] исходного многообразия. Действительно, по этой функции, решая соответствующие *функциональные уравнения* в рамках аналитического подхода, можно найти полную группу движений, относительно которой эта функция является двухточечным инвариантом.

В работе "О фактах, лежащих в основании геометрии"[25] Г. Гельмгольцем было высказано предположение о том, что метрическая функция двумерной геометрии не может быть произвольной, если твердое тело в своем

[23]Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Барнаул: БГПУ, 2004. – 132 с.
[24]Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1973.
[25]Гельмгольц, Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С.366-388.

движении имеет три степени свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для любых четырех точек i, j, k, l должна существовать функциональная связь, так как при ее отсутствии число степеней свободы четырехточечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия двумерной геометрии невозможна при произвольной метрической функции. Этот факт был установлен Г.Г. Михайличенко[26]. Заметим еще, что задачу определения всех двумерных геометрий, в которых "положение фигуры задается тремя условиями впервые четко сформулировал А. Пуанкаре в своей известной работе "Об основных гипотезах геометрии"[27].

В качестве примера приведем феноменологически симметричную плоскость Евклида. Известно, что в декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между любыми двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается метрической функцией

$$f(i,j) = \rho^2(i,j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

Возьмем на плоскости Евклида четыре произвольные точки i, j, k, l и запишем для них по этой метрической функции шесть квадратов взаимных расстояний: $f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)$. Хорошо известно[28], что они функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i,j) & f(i,k) & f(i,l) \\ 1 & f(i,j) & 0 & f(j,k) & f(j,l) \\ 1 & f(i,k) & f(j,k) & 0 & f(k,l) \\ 1 & f(i,l) & f(j,l) & f(k,l) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

геометрический смысл которого состоит в том, что трехмерный объем тетраэдра с вершинами, лежащими на двумерной плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И. Кулакова[29] это соотношение, справедливое для любой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$, выражает *феноменологическую симметрию* плоскости Евклида.

[26]Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. –1981. – Т.260, №4, С.803-805; Mikhaylitchenko, G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981. – T.293. Serie 1. – P.529- 531.

[27]Пуанкаре, А. Об основных гипотезах геометрии / А. Пуанкаре. // Об основаниях геометрии. - М., 1956. – С. 388-398.

[28]Берже, М. Геометрия: Пер. с франц. Т1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.

[29]Кулаков, Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. – 1970. –Т.193, № 5. – С.985-987.

По метрической функции плоскости Евклида можно найти группу ее движений (см. задачу 2.2.1 из §2.2 второй главы):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned}\right\}$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные. Множество всех движений выражает групповую симметрию плоскости Евклида. В своей работе "О групповой и феноменологической симметриях в геометрии"[30] Г.Г. Михайличенко установил, что групповая и феноменологическая симметрии в геометрии равносильны (здесь имеются в виду геометрии, задаваемые метрической функцией).

В числе важнейших понятий обсуждаемой здесь теории отметим понятие ранга феноменологической симметриии геометрий ($m = n + 2$): это количество точек n - мерного пространства, для которых $m(m-1)/2$ расстояний связаны упомянутым выше функциональным соотношением. К настоящему времени построены полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий соответствующих рангов 3, 4 и 5, а также двуметрических ($s = 2$), триметрических ($s = 3$) и четыреметрических ($s = 4$) феноменологически симметричных геометрий минимального ранга, равного 3 (см. работы Г.Г. Михайличенко[31], В.Х. Лева[32], В.А. Кырова[33]). Другие классификации еще не построены, так как не найдены новые более эффективные методы решения подобных задач.

Основными же методами классификации феноменологически симметричных геометрий являются сейчас групповой и аналитический методы, которые были предложены и разработаны Г.Г. Михайличенко в рамках теории физических структур[34], как феноменологически симметричной геометрии двух множеств.

Основу группового метода классификации составляет установленная Г.Г. Михайличенко эквивалентность групповой и феноменологической сим-

[30] Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288.

[31] см. Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. II. /Г.Г. Михайличенко. // Наука, культура, образование. – 2001. – № 8/9. – С. 7-16; Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Барнаул: БГПУ, 2004. – 132 с.

[32] Лев, В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90-103.

[33] Кыров, В.А. Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов / В.А. Кыров. // Известия высших учебных заведений. Математика. –Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2008. – № 6. – С.29-42.

[34] Михайличенко, Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2). Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1973. – Т.14, № 5. – С. 1057-1064; Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I. / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395.

метрий[35].

Групповой метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в определении всех локальных групп Ли преобразований многообразия и соответствующих им алгебр Ли, между которыми (геометриями и группами Ли) имеется взаимно однозначное соответствие[36]. В данном методе метрические функции феноменологически симметричных геометрий являются двухточечными инвариантами соответствующих групп преобразований исходного многообразия. Задача классификации таких геометрий предполагает предварительную полную классификацию групп преобразований с определенным числом параметров[37]. Однако с ростом размерности многообразия, числа компонент метрической вектор-функции f и ранга феноменологической симметрии проведение полной классификации групп преобразований становится технически сложными, например, не удается построить классификацию шестипараметрических групп преобразований трехмерного многообразия.

Аналитический метод классификации состоит в получении функционально-дифференциальных соотношений из свойств соответствующей функциональной матрицы и переходу от них к системе дифференциальных уравнений. Ее решения делятся на невырожденные, согласующиеся с системой исходных аксиом и вырожденные – им не удовлетворяющие. Невырожденные решения есть метрические функции, задающие на гладком многообразии феноменологически симметричные геометрии, которые определяются с точностью до обратимой замены локальных координат в многообразии и гладкого преобразования $\psi(f) \to f$. Таким образом, основа аналитического метода исследования состоит в применении методов классического математического анализа к специфическим задачам, возникающим при классификации феноменологически симметричных геометрий и исследовании их свойств.

Гибкое сочетание аналитического и группового методов было применено В.Х. Левом при воспроизведении классификации двумерных и построении классификации трехмерных геометрий[38].

[35]см. Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288; Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I. / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395.

[36]см. Михайличенко, Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1982. – Т.23, № 5. – С. 132 -141; Михайличенко, Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований / Г.Г. Михайличенко. // Вестник МГУ сер. 1. Математика, механика. – 1986. – № 5. – С. 93.

[37]см. Михайличенко, Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований / Г.Г. Михайличенко. // Вестник МГУ сер. 1. Математика, механика. – 1986. – № 5. – С. 93; Михайличенко, Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства Г.Г. Михайличенко. // Известия вузов. Математика. – 1997. – №9(424). – С. 41-48.

[38]Лев, В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур / В.Х. Лев. // Вычислительные

В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий, опирающийся на гипотезу о вложении[39], которую поясним следующим примером. Двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга 4, задаваемые на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (1.30) §1.5, вложены в трехмерные феноменологически симметричные геометрии ранга 5, задаваемые на гладком трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (1.41) §1.5, то есть $f(i,j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \chi(g(x_i, y_i, x_j; y_j), z_i, z_j)$, где $g(i,j) = g(x_i, y_i, x_j, y_j)$ есть метрическая функция двумерной феноменологически симметричной геометрии ранга 4. Справедливость гипотезы подтверждается сопоставлением классификаций двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко[40] и В.Х. Лева[41]). В частности, метрическая функция плоскости Евклида (1.35) есть ограничение на метрическую функцию пространства Евклида (1.44) (см. §1.5).

Вопрос о необходимости применения разных методов классификации феноменологически симметричных геометрий является существенным, поскольку, во-первых, не во всех случаях при построении таких геометрий можно ограничиться только одним методом; во-вторых, применение разных методов в проведении классификации геометрии позволяет судить о полученных ранее результатов с иной точки зрения. Например, двумерные феноменологически симметричные геометрии, также как двуметрические и триметрические геометрии, были построены групповым методом, а трехмерные феноменологически симметричные геометрии методом, предложенным В.Х. Левом. С другой стороны, классификация двумерных геометрий была вначале построена групповым методом, а затем воспроизведена В.Х. Левом методом, отличным от группового. Эти соображения естественно приводят к задаче воспроизведения классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий аналитическим методом, который опирается на анализ ранга некоторых функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла с точностью до гладкой замены локальных координат, позволяющей редуцировать, возникающие из них системы функциональных уравнений к максимально простому виду. Развитие аналитического метода и его использование было осуществлено автором настоящего исследо-

системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90-103.

[39]см. Кыров, В.А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии / В.А. Кыров. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т 13. № 4. – С. 38-51; Кыров, В.А. Функциональные уравнения в симплектической плоскости / В.А. Кыров. // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16. № 2. – С. 149-153.

[40]Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Барнаул: БГПУ, 2004. – 132 с.

[41]Лев, В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90-103.

вания (см. главы 2, 3) и опубликовано в работах [1], [2].

Цель работы состоит в исследовании аналитическими методами проблем классификации и определения групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий.

Исходя из поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Развить в рамках аналитического подхода методы классификации и применить их к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, опираясь на исследование ранга и геометрического смысла возникающих функциональ-но-дифференциальных соотношений (глава 3 §3.2).

2. Осуществить анализ полученных результатов классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий и сравнить их с результатами других авторов (глава 3 §3.3).

3. Найти группу движений двуметрической феноменологически симметричной двумерной геометрии, имеющей содержательную физическую интерпретацию в термодинамике и вычислить все их двухточечные инварианты (глава 3 §§3.4, 3.5).

4. Развить методы решения функциональных уравнений на множество движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей (глава 2 §§2.3, 2.4).

5. Найти аналитическими методами группы движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей как решение функциональных уравнений и определить все их двухточечные инварианты (глава 2 §§2.3, 2.4, 2.5).

Методы исследований. Результаты диссертации получены применением методов математического анализа, теории дифференциальных и функциональных уравнений,а также теории непрерывных групп Ли преобразований. В первой главе для общего случая приводятся аксиомы и определения, описывающие свойства многообразия и метрической функции, задающей на нем геометрию. Во второй главе задача определения множества всех движений приводит к разработке аналитических методов решения соответствующих функциональных уравнений. В третьей главе развивается аналитический метод с целью его применения к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Решением соответствующих функциональных уравнений найдены группы движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельм-

гольцевой плоскостей (теоремы 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2);

2. Найдены все двухточечные инварианты групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей (теоремы 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, как результаты решения задач 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4);

3. Новым методом, то есть расширенным аналитическим (существенно использующим исследование ранга функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла: в первую очередь имеется в виду гладкая допустимая замена локальных координат, позволяющая редуцировать дифференциальные уравнения к максимально простому виду), построена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий (теоремы 3.1.1, 3.2.1), в которой в отличие от построений Л.М. Блюменталя заранее не задается вид функциональной связи между расстояниями. Метрическая функция оказывается вектор-функцией, каждая компонента которой не обязательно удовлетворяет обычным аксиомам метрики. Указанная редукция дифференциальных уравнений позволяет сопоставлять полученные нами решения с результатами других авторов.

4. Решением соответствующих функциональных уравнений определена группа движений двуметрической феноменологически симметричной двумерной геометрии, имеющей содержательную физическую интерпретацию в термодинамике и найдены все ее двухточечные инварианты.

Теоретическая и практическая значимость результатов.

Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области геометрии, теории функций и отображений, теории конечных непрерывных групп и теоретической физики. Большая часть результатов связана с новой проблематикой и может служить основой для дальнейших исследований вопросов классификации феноменологически симметричных геометрий. Все теоремы и леммы в тексте диссертации, а также решения задач приведены с полными доказательствами. В дополнение к сказанному, материалы диссертации могут быть использованы при организации спецкурсов по дополнительным вопросам математического анализа, дифференциальной геометрии, теоретической физики, предназначенных для магистров и аспирантов высших учебных заведений. Круг проблем, освещенных в работе, допускает естественное обобщение на пространства более высоких размерностей. Таким образом, исследования в намеченном здесь направлении могут быть продолжены.

Основные положения, выносимые на защиту:

- разработанные методы решения функциональных уравнений на множество движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей;

- полная система двухточечных инвариантов групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей;

- новый метод классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, то есть расширенный аналитический метод, существенно использующий исследование ранга и геометрического смысла, возникающих функционально-диф-ференциальных соотношений;

- анализ сопоставления полученных результатов в отношении классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий с результатами других авторов.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается использованием общепринятых в математике методов исследования, а также согласованностью с научными данными, представленными в работах других авторов этого направления.

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертации получены автором лично под руководством д.ф.-м.н., профессора Г.Г. Михайличенко.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались:

- на семинарах по теории физических структур в Горно-Алтайском государственном университете (руководитель: д.ф.-м.н., профессор Г.Г. Михайличенко);

- на семинарах кафедры математического анализа Горно-Алтайского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., доцент А.В. Тетенов);

- на семинарах кафедры теории функций Томского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., профессор С.П. Гулько);

- на семинарах кафедры геометрии Томского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., доцент Н.Р. Щербаков);

а также на международных и российских конференциях:

- Международная конференция "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск, 27 – 30 апреля 2008;

- Всероссийская научно-практическая конференция "Математическое образование в регионах России". Барнаул, 21 ноября 2008;

- Международная молодежная конференция "Современные методы в механике": Математика и ее применение в задачах механики. Томск, 19 – 20 сентября 2012;

- Международная школа-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае": Анализ, геометрия и топология. Барнаул, 20 –23 ноября 2012 г.

Методы решения функциональных уравнений, разработанные автором и представленные в диссертационном исследовании, использовались при выполнении работ по гранту РФФИ № 12-01-90806 – мол_рф_нр "Исследование построения классификации двуметрических двумерных геометрий" (01.07.2012 – 29.12.2012).

Публикации. По теме диссертации подготовлено и опубликовано всего 10 работ, из них две статьи в рецензируемых изданиях из списка ВАК ([1], [2]), две статьи в сборниках научных трудов ([7], [9]) и 6 публикаций в материалах международных и всероссийских научных конференций ([3] – [6], [8], [10]).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из списка обозначений, введения, трех глав, заключения и списка литературы. Первая глава содержит шесть параграфов, вторая пять параграфов и третья пять параграфов. Работа изложена на 152 страницах. Список литературы содержит 60 наименований.

Перейдем к краткому изложению содержания работы и точным формулировкам исходных аксиом и основных результатов. Будем использовать номера аксиом, определений, формул, задач и теорем, введенные в основном тексте диссертационной работы.

Содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме. На примере евклидовой плоскости пояснено, что значит феноменологическая и групповая симметрии в обычной геометрии и как следует понимать эквивалентность этих симметрий. Далее дается краткое изложение основных определений и результатов диссертации, чтобы можно было получить полное представление о ее содержании до ознакомления с подробностями доказательств.

Первая глава носит подготовительный характер и необходима для общего знакомства с феноменологической и групповой симметриями в геометрии. В ней по работам Г.Г. Михайличенко[42] даются строгие формулировки исходных аксиом и определений, а также теорем о феноменологической и групповой симметриях в геометрии. В **§1.5** на примерах плоскости и пространства Евклида поясняются групповая и феноменологическая симметрии,

[42] см. Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288; Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1984. – XXV, № 5. – С. 99 – 113; Michailichenko, G.G. On group and phenomenological simmetries in geometry / G.G. Michailichenko // Soviet Math. Dokl. – 1983. – V.27, № 2. – P. 325-326.

а также их эквивалентность. В заключительном **§1.6** проводится обзор имеющихся к настоящему времени методов классификации феноменологически симметричных геометрий и формулируется задача о классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий аналитическим методом, решение которой представлено в третьей главе.

Краткое изложение содержания §§1.1 – 1.4.

В §1.1 приведены основные аксиомы, определения и теоремы о феноменологической и групповой симметриях одномерной геометрии с целью уточнения используемых в настоящей работе обозначений.

Содержание §§1.2 – 1.4 изложено по работам Г.Г. Михайличенко [43].

§1.2. Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_{sn}$, наделенное структурой гладкого sn-мерного многообразия, где s и n - натуральные числа, точки которого здесь и далее будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i,j\rangle$ из области определения $\mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i,j) = (f^1(i,j),\ldots,f^s(i,j)) \in R^s$.

Для некоторого кортежа $\langle k_1,\ldots,k_n\rangle \in \mathfrak{M}^n_{sn}$ длины n введем функции $g_n = g_n(k_1,\ldots,k_n)$ и $q_n = q_n(k_1,\ldots,k_n)$. С их помощью сопоставим точке $i \in \mathfrak{M}_{sn}$ точки $(f(i,k_1),\ldots,f(i,k_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1,i),\ldots,f(k_n,i)) \in R^{sn}$ соответственно, если $\langle i,k_1\rangle,\ldots,\langle i,k_n\rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle k_1,i\rangle,\ldots,\langle k_n,i\rangle \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций g_n и q_n могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}_{sn}$.

В отношении вектор-функции $f = (f^1,...,f^s)$, заданной на sn-мерном гладком многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

Аксиома 1.2.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ подмножество.

Аксиома 1.2.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 1.2.3. В $\mathfrak{M}^n_{sn}$ плотно множество таких кортежей длины n, для которых отображение g_n и отображение q_n имеют максимальный ранг, равный sn, в точках плотного в $\mathfrak{M}_{sn}$ подмножества.

Определение 1.2.1. Вектор-функцию $f = (f^1,...,f^s)$, для которой выполняются аксиомы **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3**, будем называть ***метрической вектор-функцией*** или просто ***метрической функцией***, не требуя для ее

[43]см. Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288; Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1984. – XXV, № 5. – С. 99 – 113; Michailichenko, G.G. On group and phenomenological simmetries in geometry / G.G. Michailichenko // Soviet Math. Dokl. – 1983. – V.27, № 2. – P. 325-326.

s компонент выполнения аксиом обычной метрики[44].

Заметим, что ограничение в аксиомах **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3** открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

На основе исходной метрической вектор-функции f построим отображение F, сопоставляющее кортежу $\langle i,j,k,\ldots,v,w\rangle$ длины $m = n+2$ из $\mathfrak{M}^m_{sn} = (\mathfrak{M}_{sn})^m$ точку $z = (f(i,j), f(i,k),\ldots,f(v,w)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ чисел для следующих пар его точек: $\langle i,j\rangle, \langle i,k\rangle,\ldots,\langle i,w\rangle,\langle j,k\rangle,\ldots,\langle v,w\rangle$ если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Открытую и плотную в $\mathfrak{M}^m_{sn}$ область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1.2.2. Будем говорить, что вектор-функция $f = (f^1,\ldots, f^s) \in R^s$ задает на sn-мерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n+2$, если, кроме аксиом **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3**, дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.2.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждого элемента которого, то есть кортежа $\langle i,j,k,\ldots,v,w\rangle$ длины $m = n+2$ и некоторой его окрестности $U(\langle i,j,k,\ldots,v,w\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \to R^s$, определенная в некоторой области $E \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $z = F(\langle i,j,k,\ldots,v,w\rangle)$, что в ней $rang\Phi = s$ и множество $F(U(\langle i,j,k,\ldots,v,w\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(z) = \Phi(f(i,j), f(i,k),\ldots,f(v,w)) = 0 \tag{1.23}$$

для всех кортежей из $U(\langle i,j,k,\ldots,v,w\rangle)$.

Аксиома **1.2.4** составляет содержание принципа феноменологической симметрии.

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция f задавала на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n+2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство **теоремы 1.2.1** можно найти в монографии[45]

[44] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968.

[45] Михайличенко, Г.Г. Полиметрические геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Новосибирск: НГУ, 2001.

Г.Г. Михайличенко и его работе "Простейшие полиметрические геометрии. I."[46].

§1.3. Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \to U' \tag{1.28}$$

называется *локальным движением*, если оно сохраняет метрическую функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Последнее означает, что для любой пары $\langle i, j\rangle \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $\langle \lambda(i), \lambda(j)\rangle$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(i, j), \tag{1.29}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \ldots, f^s$ метрической функции f, в котором $\lambda(i) = \lambda(x_i^1, \ldots, x_i^{sn}), \lambda(j) = \lambda(x_j^1, \ldots, x_j^{sn})$.

Множество всех движений (1.28) есть локальная группа преобразований, для которой метрическая функция f согласно равенству (1.29) является двухточечным инвариантом. Если метрическая функция f задана явно, то равенство (1.29) является *функциональным уравнением*, решая которое можно найти полную группу локальных движений (1.28). Если же известна группа движений (1.28), то решая функциональное уравнение (1.29) можно найти метрическую функцию, как двухточечный инвариант этой группы преобразований.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что метрическая функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, *наделенную групповой симметрией* степени $sn(n+1)/2$, если, кроме аксиом **1.2.1, 1.2.2, 1.2.3** дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.3.1. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что функция $f(i, j)$ по каждой из своих s компонент является двухточечным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме **1.3.1**, определяет локальную подвижность жестких фигур в sn-мерном пространстве $\mathfrak{M}_{sn}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Будем также говорить, что метрическая функция f допускает $sn(n+1)/2$-мерную локальную группу локальных движений.

[46]Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I. / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395.

Теорема 1.3.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция f задавала на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$, где $m = n + 2$, на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство **теоремы 1.3.1** приведено в монографии[47] Г.Г. Михайличенко и его работе "Простейшие полиметрические геометрии. I."[48].

В §1.4 приводятся формулировки следующих теорем Г.Г. Михайличенко:

Теорема 1.4.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задавала на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n+2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$.*

Теорема 1.4.2. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых метрической вектор-функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$, задающей на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$, или геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, не превышает этой степени.*

Во второй главе диссертации находятся группы движений Гельмгольцевых геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуально-гельмгольцевой плоскостей) как решения соответствующих функциональных уравнений (1.29), а также двухточечные инварианты этих групп. При решении функциональных уравнений (1.29) на функции λ не накладываются никакие сильные ограничения.

В §2.1 в соответствие с содержанием §1.2 первой главы дается определение феноменологически симметричных двумерных геометрий ($s = 1, n = 2$) и приводится их классификация, построенная Г.Г. Михайличенко.

§2.2 является вводным для §§2.3–2.4 второй главы. В нем на примере плоскости Евклида, задаваемой метрической функцией

$$f(i,j) = \rho^2(i,j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

дана иллюстрация методов решения функционального уравнения (1.29) на множество движений, развитие которых позволило доказать теоремы 2.3.1 из §2.3, 2.4.1 и 2.4.2 из §2.4 для трех Гельмгольцевых геометрий, задаваемых метрическими функциями

[47] Михайличенко, Г.Г. Полиметрические геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Новосибирск: НГУ, 2001.

[48] Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I. / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395.

$$f(i,j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2)\exp\left(2\beta\mathrm{ar(c)th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.13}$$

$$f(i,j) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.14}$$

$$f(i,j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)\exp\left(2\gamma\mathrm{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.15}$$

где $\beta > 0$ *и* $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$ – параметры семейства. Двумерная геометрия с метрической функцией (2.15) была названа плоскостью Гельмгольца, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко упоминает Гельмгольц в своей работе[49]. Соответственно, метрическая функция (2.13) задает псевдогельмгольцеву плоскость, а метрическая функция (2.14) – дуальногельмгольцеву плоскость.

В **§2.3** формулируется и доказывается решением соответствующего функционального уравнения следующая теорема:

Теорема 2.3.1. *Все движения плоскости Гельмгольца образуют однопараметрическое семейство трехпараметрических групп ее преобразований*

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{2.30}$$

где $(a^2 + b^2)\exp(2\gamma\,\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}) = 1$. *Здесь* γ *положительная константа (параметр семейства).*

В **§2.4** формулируются и доказываются, путем решения соответствующих функциональных уравнений, следующие две теоремы:

Теорема 2.4.1. *Все движения псевдогельмгольцевой плоскости образуют однопараметрическое семейство трехпараметрических групп ее преобразований*

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{2.46}$$

где $(a^2 - b^2)\exp(2\beta ar(c)th\frac{b}{a}) = 1$. *Здесь* β *положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства).*

При этом выбирается функция $arth$, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция $arcth$, если аргумент по величине больше единицы.

Теорема 2.4.2. *Все движения дуальногельмгольцевой плоскости образуют трехпараметрическую группу ее преобразований*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{2.57}$$

[49]Гельмгольц, Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С.366-388.

где $a^2\exp(2\frac{b}{a}) = 1$.

В §2.5 решается обратная задача нахождения метрической функции f по заданной группе преобразований гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ для плоскости Евклида и геометрий Гельмгольца (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей). В этом параграфе сформулированы следующие четыре задачи:

Задача 2.5.1. Для группы движений плоскости Евклида

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned}\right\}$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные, найти все двухточечные инварианты функции $f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Задача 2.5.2. Для трехпараметрической группы преобразований плоскости Гельмгольца (2.30) найти все двухточечные инварианты функции $f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Задача 2.5.3. Для трехпараметрической группы преобразований псевдогельмгольцевой плоскости (2.46) найти все двухточечные инварианты функции $f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Задача 2.5.4. Для трехпараметрической группы преобразований дуальногельмгольцевой плоскости (2.57) найти все двухточечные инварианты функции $f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Результаты решения задач 2.5.1 –2.5.4 сформулированы в виде следующих теорем:

Теорема 2.5.1. *Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия* $\mathfrak{M}_2 \equiv R^2$,

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $a^2 + b^2 = 1$, c, d *– произвольные постоянные, совпадает с точностью до гладкого преобразования* $\psi(f) \to f$ *с метрической функцией плоскости Евклида, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.*

Теорема 2.5.2. *Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметричекой группы преобразований двумерного многообразия* $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned}\right\} \tag{2.76}$$

где $(a^2 + b^2)\exp(2\gamma \operatorname{arctg}\frac{b}{a}) = 1, \gamma$ *– положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования* $\psi(f) \to f$ *с* *метрической функцией плоскости Гельмгольца, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.*

Теорема 2.5.3. *Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned}\right\} \tag{2.82}$$

где $(a^2 - b^2)\exp(2\beta ar(c)th\frac{b}{a}) = 1, \beta$ положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией псевдогельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

При этом выбирается функция $arth$, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция $arcth$, если аргумент по величине больше единицы.

Теорема 2.5.4. *Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned}\right\} \tag{2.88}$$

где $a^2\exp(2\frac{b}{a}) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией дуальногельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Каждый найденный в задачах 2.5.1 – 2.5.4 двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ задает на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

В третьей главе расширенным аналитическим методом (существенно использующим исследование ранга функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла: в первую очередь имеется в виду гладкая допустимая замена локальных координат, позволяющая редуцировать дифференциальные уравнения к максимально простому виду), построена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий (теоремы 3.1.1, 3.2.1). В качестве дополнения найдены группа движений одной из них, решением соответствующей системы функциональных уравнений этих групп, и их двухточечные инварианты, а также дана физическая интерпретация.

Краткое изложение содержания §§3.1–3.5.

§3.1. Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_2$, наделенное структурой гладкого двумерного многообразия, а также гладкая функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^2$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i,j\rangle \in \mathfrak{S}_f$ два вещественных числа $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j)) \in R^2$. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$, через $U(\langle i,j\rangle)$ – окрестность пары $\langle i,j\rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Если x, y –локальные координаты гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то для вектор-функции (или отображения) $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) = (f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)), \qquad (3.1)$$

где x_i, y_i,и x_j, y_j – локальные координаты точек i и j пары $\langle i,j\rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении вектор-функции f будем предполагать выполнение следующих аксиом:

Аксиома 3.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ подмножество.

Аксиома 3.1.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 3.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множества пар локальное координатное представление (3.1) вектор-функции $f(i,j)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f^1(i,j), f^2(i,j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \frac{\partial(f^1(i,j), f^2(i,j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \qquad (3.2)$$

Заметим, что при условии (3.2) ранг касательного отображения для отображения (3.1) равен 2, то есть максимален.

Определение 3.1.1. Вектор-функцию f, удовлетворяющую первым трем аксиомам **3.1.1, 3.1.2, 3.1.3**, приведенным выше, будем называть ***метрической вектор-функцией*** (или ***метрической функцией***).

На основе исходной метрической вектор-функции f строится отображение F, сопоставляющее тройке $\langle i,j,k\rangle$ из $\mathfrak{M}_2^3$ кортеж $\langle f^1(i,j), f^2(i,j), f^1(i,k), f^2(i,k), f^1(j,k), f^2(j,k)\rangle$, принадлежащий некоторому открытому подмножеству $E \subset R^6$, если пары $\langle i,j\rangle, \langle i,k\rangle, \langle j,k\rangle \in \mathfrak{S}_f$. То есть

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_2^3 \supseteq \mathfrak{S}_F \ni \langle i,j,k\rangle \xmapsto{F} \langle f^1(i,j), f^2(i,j), f^1(i,k),& \\ f^2(i,k), f^1(j,k), f^2(j,k)\rangle \in E \subset \mathbb{R}^6,& \qquad (3.3)\end{aligned}$$

где $\mathfrak{S}_F$ – есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^3$ подмножество, которое является областью определения построенной функции F.

Далее, пусть имеется еще одно гладкое отображение $\Phi : E \to S \subseteq \mathbb{R}^2$, где $E \subset \mathbb{R}^6$, которое сопоставляет точке $z \in E \subseteq \mathbb{R}^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in \mathbb{R}^2$.

Аксиома 3.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждой тройки $\langle i,j,k\rangle$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i,j,k\rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \to S \subseteq \mathbb{R}^2$, определенное в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $z = F(\langle i,j,k\rangle)$, что в ней ранг якобиевой матрицы отображения Φ равен 2 и множество $F(U(\langle i,j,k\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f^1(i,j), f^2(i,j), f^1(i,k), f^2(i,k), f^1(j,k), f^2(j,k)) = (0,0) \qquad (3.4)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – функция шести переменных, для всех троек из $U(\langle i,j,k\rangle)$.

Определение 3.1.2. Будем говорить, что метрическая вектор-функция f задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ ***двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3***, если, кроме аксиом **3.1.1, 3.1.2, 3.1.3**, она удовлетворяет еще аксиоме **3.1.4.**

Далее формулируется и доказывается **теорема 3.1.1**:

Теорема 3.1.1.

1. Если ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве, то метрическая вектор-функция $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, удовлетворяющая аксиомам 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную ранга 3 двумерную геометрию (то есть удовлетворяет аксиоме 3.1.4).

2. Система аксиом 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 и 3.1.4 совместна, то есть существует модель соответствующей аксиоматической теории - набор вектор-функций $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.

Доказательство первого пункта теоремы основано на **лемме 3.1.1**, суть которой состоит в том, что если вектор-функция $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$ и аналогичные ей удовлетворяют аксиомам **3.1.1, 3.1.2, 3.1.3**, то ранг матрицы отображения F не менее 4, а также **замечания 3.1.1**. Согласно **замечанию 3.1.1** понижение ранга матрицы до четырех вследствие феноменологической симметрии равносильно тому, что каждый из двух первых столбцов матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (то есть столбцов с номерами 3,4,5,6). Требование разложимости по базисным столбцам первого столбца налагает ограничения на производные функции $f^1(i,j)$ и аналогичных ей функций. Такое же требование, предъявленное ко второму столбцу, налагает точно те же ограничения на производные функции $f^2(i,j)$ по тем же аргументам. Согласно теореме математического анализа о функциональной зависимости[50] для некоторой окрестности $U(\langle i,j,k\rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \to \mathbb{R}^2$, определенное в соответствующей области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $z = (f^1(i,j), f^2(i,j), f^1(i,k), f^2(i,k), f^1(j,k), f^2(j,k))$, в которой $rang(\Phi) = 2$ и имеют место уравнения (3.4).

Поскольку ранг матрицы отображения F для исходной тройки $\langle i,j,k\rangle$ равен 4 и максимален в окрестности $U(\langle i,j,k\rangle)$, из этой же теоремы о функциональной зависимости следует, что найдется такая его окрестность $U' \subseteq U$ и соответствующая область $E' \subseteq E$, для которых множество значений $F(U')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в E', являясь гладкой без особых точек поверхностью в $\mathbb{R}^6$. На этом доказательство первого пункта теоремы завершается.

Второй пункт доказательства состоит из двух этапов. В первом этапе доказательства показывается от противного, что ранг матрицы отображения F не более 4 тем самым устанавливается, что он точно равен 4. Во втором этапе доказательства необходимо построить двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3, удовлетворяющую всем аксиомам 3.1.1 – 3.1.4. Для этого в **§3.2** формулируется и доказывается классификационная теорема 3.2.1:

Теорема 3.2.1. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ и замены локальных координат x, y существуют две и только две невырожденные метрические вектор-функции вида $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, задающие на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную ранга 3 двумерную геометрию. Компоненты этих метрических вектор-функций могут быть представлены следующими выражениями:*

$$1.\ \ f^1(i,j) = x_i - x_j,\ \ f^2(i,j) = y_i - y_j, \tag{3.8}$$

$$2.\ \ f^1(i,j) = (x_i - x_j)y_i,\ \ f^2(i,j) = (x_i - x_j)y_j. \tag{3.9}$$

Выражения (3.8), (3.9) естественно называть каноническими выражениями.

В рамках доказательства этой теоремы формулировались и доказывались **леммы 3.2.1** и **3.2.2**, содержание которых направлено на исследование рангов соответствующих систем функционально-дифференциальных уравнений. Гладкая допустимая замена локальных координат позволила редуцировать эти системы к максимально простому виду. Применение аналитического метода, дополненного учетом геометрического смысла, привело к трем реше-

[50]Зорич, В.А. Математический анализ: учебник. Ч. I. / В.А. Зорич. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: ФАЗИС, 1997. – 554 с.

ниям, первые два из которых соответствуют первому и второму каноническим выражениям. Третье решение оказалось эквивалентным второму каноническому выражению (3.9) при соответствующем гладком преобразовании $\psi(f) \to f$ и гладкой обратимой замены локальных координат x, y.

В §3.3 полученная классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий сравнивается с соответствующей классификацией этих же геометрий, которая была построена Г.Г. Михайличенко групповым методом отличным от данного. Полученные же нами в §3.2 результаты приводят к постановке следующей задачи.

Задача 3.3.1. Установить с точностью до гладкого обратимого преобразования $\psi(f) \to f$, где $\psi(f) = (\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2))$ и соответствующей гладкой замены локальных координат $(\varphi(x,y), \tau(x,y)) \to (x,y)$ эквивалентность или неэквивалентность следующих метрических вектор-функций, каждая из которых задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию:

$$\mathbf{1.}\quad f^1(i,j) = x_i - x_j, \quad f^2(i,j) = y_i - y_j, \tag{3.32}$$

$$\mathbf{2.}\quad f^1(i,j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i,j) = (x_i - x_j)y_j, \tag{3.33}$$

$$\mathbf{3.}\quad f^1(i,j) = x_i - x_j, \quad f^2(i,j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j. \tag{3.34}$$

Решение этой задачи сводится к решению систем функциональных уравнений относительно φ, τ и ψ для всех трех возможных пар: 1) **1** и **2**, 2) **3** и **1**, 3) **3** и **2**. В результате доказывается, что функции **1** и **2** не эквивалентны, также как и функции **3** и **1**. Установлено также, что в паре **3** и **2** функция (3.34) эквивалентна функции (3.33) с точностью до замены координат

$$(\varphi(x,y), \tau(x,y)) = (ye^{-x}, e^x) \to (x,y)$$

и гладких преобразований

$$(\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2)) = (f^2 \exp(f^1), f^2) \to (f^1, f^2),$$

в которых $f^1 = x_i - x_j, \quad f^2 = y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j$.

В §3.4 для метрических функций (3.32), (3.33) и (3.34), также как и для Гельмгольцевых геометрий решаются задачи о нахождении соответствующих групп движений и их двухточечных инвариантов. В этом параграфе показывается, что группы движений двух геометрий, задаваемых метрическими функциями (3.33) и (3.34) подобны.

В §3.5 дается физическая интерпретация одной из двуметрических феноменологически симметричных геометрий. Такую геометрию можно ввести на плоскости термодинамических состояний (P, V).

Пусть состояние термодинамической системы i задается двумя термодинамическими параметрами – объемом V_i и давлением P_i. Тогда все множество состояний представляет собой первую четверть числовой плоскости, так как $V \geq 0$, $P \geq 0$. Каждой паре состояний $\langle i, j\rangle$ сопоставим два числа, равные работам $A^{PV}(i,j)$, $A^{VP}(i,j)$, которые внешние тела совершают над системой при ее переходе из начального состояния i в конечное состояние j по двум различным путям PV и VP, состоящим из равновесных изобарного ($P = const$) и изохорного ($V = const$) процессов:

$$\left.\begin{array}{l} A^{PV}(i,j) = (V_i - V_j)P_i, \\ A^{VP}(i,j) = (V_i - V_j)P_j. \end{array}\right\} \tag{3.66}$$

Двухкомпонентная функция $\mathbf{A} = (A^{PV},\ A^{VP})$ с выражениями (3.66) для ее компонент задает на плоскости термодинамических состояний $(P,\ V)$ двуметрическую геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии, задаваемой на координатной плоскости (x, y) метрической функцией (1.35) (см. §1.5 главы 1), одновременно феноменологически симметрична и наделена групповой симметрией.

Группа движений для метрической функции (3.66) состоит из всех тех преобразований

$$\begin{array}{l} V' = \lambda(V,P), \\ P' = \sigma(V,P), \end{array} \tag{3.68}$$

плоскости (P,V), которые удовлетворяют двум функциональным уравнениям, являющимися следствиями инвариантности ее компонент:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) = (V_i - V_j)P_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) = (V_i - V_j)P_j, \end{array}\right\} \tag{3.69}$$

Решения этих уравнений легко находятся с помощью разделения переменных:

$$\lambda(V,P) = aV + b, \quad \sigma(V,P) = \frac{P}{a}, \tag{3.70}$$

где $a > 0$.

Множество всех преобразований (3.68) с решениями (3.70) является полной группой движений для метрической функции (3.66), выражая групповую симметрию степени 2 двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости термодинамических состояний (P,V) этой функцией.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю: доктору физико-математических наук, профессору Геннадию Григорьевичу Михайличенко за постановку задач, научное руководство и помощь в работе. Автор искренне благодарит и выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, зав. кафедрой теории функции ТГУ, профессору Сергею Порфирьевичу Гулько и всем участникам семинара за активное обсуждение результатов настоящей работы; кандидату физико-математических наук, доценту Евгению Матвеевичу Горбатенко за ценные советы и пожелания. Автор также искренне благодарит доктора физико-математических наук, зав. кафедрой математического анализа ГАГУ Андрея Викторовича Тетенова за всестороннюю помощь в работе над диссертацией, кандидата физико-математических наук, доцента Владимира Александровича Кырова за ценные замечания и постоянную поддержку. Отдельные слова благодарности заслуживают преподаватели кафедр теории функции ТГУ, геометрии ТГУ, математического анализа ГАГУ, физики и МПФ ГАГУ, математики и информатики ГАГУ, алгебры, геометрии и МПМ ГАГУ за внимание к теме данного исследования.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в журналах, включенных в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций:

[1] Богданова, Р.А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т.12, № 4. – С. 12 - 22. – 0,69 п.л.

[2] Богданова, Р.А. Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3 / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – № 1(27). – С. 11 - 24. – 1,12 п.л.

Публикации в других научных изданиях:

[3] Богданова (Черубаева), Р.А. Некоторые группы преобразований и функциональные уравнения / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Приложение (Доклады VI Сибирской научной школы-семинара с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография"SIBECRYPT'07: Математические основы криптологии). – 2007. – № 23. – С. 67 - 68. – 0,23 п.л.

[4] Богданова, Р.А. Некоторые группы преобразований и функциональные уравнения / Р.А. Богданова. // Доклады всероссийской научно-технической конференции "Информационные системы и модели в научных исследованиях, промышленности и экологии":Моделирование процессов и систем. / Под общ. ред. д.т.н, проф. Панарина В.М. (Тула, 8 июня 2007) – Тула: ТулГУ, 2007. – С. 38 - 39. – 0,13 п.л.

[5] Богданова, Р.А. Группы движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика (Новосибирск, 27–30 апреля 2008). – Новосибирск: изд-во. Новосиб. гос. ун-та, 2008. – С. 31. – 0,06 п.л.

[6] Богданова, Р.А. Группы движений плоскости Гельмгольца / Р.А. Богданова. // Материалы всероссийской научно-практической конференции "Математическое образование в регионах России": Геометрия (Барнаул, 21 ноября 2008). – Барнаул: БГПУ, 2008. – С. 6. – 0,06 п.л.

[7] Богданова, Р.А. Группа движений пространства Евклида как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Вестник молодых ученых: сборник научных работ № 8. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2011. – С. 160 - 162. – 0,37 п.л.

[8] Богданова, Р.А. Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3 / Р.А. Богданова. // Материалы международной молодежной конференции "Современные методы механики": Математика и ее применение в задачах механики (Томск, 19 – 20 сентября 2012). – Томск: Изд-во. Том. ун-та, 2012. – С. 5 - 6. – 0,13 п.л.

[9] Богданова, Р.А. Исследование ранга отображения двухкомпонентной метрической функции / Р.А. Богданова. // Сборник научных статей международной школы семинара "Ломоносовские чтения на Алтае": Анализ, геометрия и топология (Барнаул, 20–23 ноября 2012). – Барнаул: АлтГПА, 2012. – С. 260 - 264. – 0,31 п.л.

[10] Богданова, Р.А. Функциональное уравнение, возникающее при восстановлении метрики по группе движений пространства Евклида / Р.А. Богданова. // Materialy VIII mezinarodni vedecko - prakticka konference "Veda a technologie: krok do budoucnosti - 2012". - Dil 33. Matematika. Fyzika. Vystavba a architektura: Praha. Publishing House "Education and Science"s.r.o, 2012. – P. 3 - 5. – 0,19 п.л.

БОГДАНОВА РАДА АЛЕКСАНДРОВНА

Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий

Автореферат

Издательство Горно-Алтайского государственного университета
649000 Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
Подписано в печать 23.04.2014. Формат 60*84/16.
Бумага для множительных аппаратов. Печать ризо.
Печ. л. 1,9. Тираж 120 экз.
Заказ № 65.

Отпечатано полиграфическим отделом
Горно-Алтайского госуниверситета
649000 Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.