ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА СО РАН



**Богданов Владимир Васильевич**

# ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



**Новосибирск — 2014**

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

**Научный руководитель:**

Волков Юрий Степанович, доктор физико-математических наук

**Официальные оппоненты:**

Субботин Юрий Николаевич, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, главный научный сотрудник

Шумилов Борис Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО Томский государственный архитектурно-строительный университет, профессор

**Ведущая организация:** ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится 8 мая 2014 г. в 15 час. на заседании диссертационного совета Д 003.015.04 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу:

630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "31" марта 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук В.Л. Мирошниченко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Имеется большое количество интерполяционных задач, в которых важно, чтобы решение обладало такими свойствами как знакопостоянство, монотонность или выпуклость, т.е. сохраняло геометрическую форму данных. Рассматривая задачу построения сплайнов с заданными геометрическими свойствами, А. И. Гребенников (1978) назвал её задачей изогеометрической аппроксимации. Эта терминология в дальнейшем стала использоваться и в задачах интерполяции. Часто, подчёркивая согласованность геометрических свойств интерполянта с данными, интерполяцию называют формосохраняющей (shape-preserving).

Основным аппаратом решения задач интерполяции в настоящее время являются полиномиальные сплайны. В то же время вопросы, связанные с наследованием ими геометрической формы данных порой довольно сложны, изучены далеко не полно и до сих пор актуальны.

Впервые полиномиальные сплайны в качестве самостоятельного объекта исследования появились в работе И. Шёнберга (1946). Первая монография по сплайнам Дж. Алберга, Э. Нильсона, и Дж. Уолша (1967), переведёная в 1972 году Ю. Н. Субботиным под редакцией С. Б. Стечкина послужила толчком к русскоязычному изложению развивающейся теории. В 1976 году вышла книга С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина, посвящённая сплайнам в вычислительной математике. В 80-х годах прошлого века наблюдался пик активности в изложении основ теории сплайнов. Появились монографии Ю. С. Завьялова, Б. И. Квасова и В. Л. Мирошниченко (1980), Л. Шумейкера (1981), В. А. Василенко (1983), А. И. Гребенникова (1983), Н. П. Корнейчука (1984), К. де Бора (1979), В. Н. Малозёмова и А. Б. Певного (1986). Вышедшие в дальнейшем книги А. И. Роженко (1999, 2005) и Б. И. Квасова (2006) систематизировали некоторые новые подходы к теории сплайнов.

Наиболее популярны и востребованы в практических задачах кубические сплайны. Однако присущая им некоторая "жёсткость" может негативно проявляться при изогеометрической интерполяции.

Под задачей формосохраняющей или изогеометрической интерполяции понимается требование, чтобы интерполянт $S(x)$ или какая-либо его производная $S^{(k)}(x)$ были знакопостоянными, если знакопостоянны интерполируемая функция $f(x)$ или, соответственно, её производная $f^{(k)}(x)$. Знакопостоянство $k$-ой производной $f^{(k)}(x)$ гладкой функции $f(x)$ называют $k$-монотонностью, которая при $k = 0, 1, 2$ имеет классические названия: знакопостоянство, монотонность и выпуклость, соответственно.

Для функций, не обладающих свойством $k$-монотонности, интерес представляет возможность разбиения области задания на промежутки $k$-монотонности, что характеризует свойство кусочной $k$-монотонности функции. При этом смена знака производной порядка $k$ характеризует изменение направления $k$-монотонности функции.

Геометрические свойства функции $f$, заданной на отрезке $[a, b]$ дискретно своими значениями $f_i = f(x_i)$ в некоторых точках $x_i$, образующих сетку

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

в отсутствие иной информации характеризуются знаками разделённых разностей порядка $k$, которые для всех возможных $i$ определяются рекуррентно: $\delta_i^{(0)} = f_i$, $\delta_i^{(k)} = (\delta_{i+1}^{(k-1)} - \delta_i^{(k-1)})/(x_{i+k} - x_i)$. Такая характеристика обусловлена тем, что для достаточно гладкой функции существует $\xi_{ik} \in [x_i, x_{i+k}]$, такое что $k!\,\delta_i^{(k)} = f^{(k)}(\xi_{ik})$. Дискретные данные $\{f_i\}$ со знакопостоянными разделёнными разностями порядка $k$ также называются $k$-монотонными.

Аппроксимацию, согласованную с кусочной $k$-монотонностью данных, представляющих заданную на сетке функцию, называют сохраняющей кусочную $k$-монотонность или $k$-комонотонной.

Данная работа посвящена вопросам интерполяции данных с учетом их $k$-монотонности и кусочной $k$-монотонности для $k = 1, 2$, т.е. комонотонной ($k = 1$) и ковыпуклой ($k = 2$) интерполяции сплайнами. В этих случаях первую и вторую разделённые разности принято обозначать $f[x_i, x_{i+1}] \equiv \delta_i^{(1)}$ и $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \equiv \delta_{i-1}^{(2)}$, для краткости $\delta_i = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$.

Первым обратил внимание на проблему формосохранения (посторонние точки перегиба) при интерполяции кубическим сплайном выпуклых данных и предложил средство устранения этой излишней жёсткости Д. Швейкерт[1]. Введённые им понятия натяжения и параметров, управляющих им, определили новое направление развития теории сплайнов. Встраивая в структуру сплайна гиперболические функции, он получил конструкцию, которая с увеличением параметра натяжения приближалась к линейному сплайну, гарантирующему выпуклость интерполяции.

[1] *Schweikert D. G.* An interpolation curve using a spline in tension // J. Math. Phys. — 1966. — Vol. 45. — P. 312–317.

Предпочитая не сильно уходить от кубического сплайна, во многом идеальной конструкции, К. де Бор[2] предложил использовать натяжение (напряжённые сплайны) для кусочно полиномиальных интерполяций понижая гладкость функции между узлами сетки введением фиктивных дополнительных узлов.

Все конструкции, в которых так или иначе используются параметры натяжения, принято называть обобщенными сплайнами; они и обозначили один из путей подавления нежелательных осцилляций. Названия функций, внедрённых в структуру, определили и названия таких сплайнов. Г. Шпэт (1969) ввел в обращение понятие рационального сплайна, экспоненциальные сплайны рассматривались в работах С. Пруэса (1979), П. Рентропа (1980), Б. МакКартина (1990). Р. Соанес (1976) предложил конструкцию сплайнов переменной степени ($VP$-сплайны). Взвешенные сплайны изучали К. Салкаускас (1984), Т. Фоли (1987), В. Л. Мирошниченко (1995), Б. И. Квасов (2013).

Таким образом, в проблеме изогеометрической интерполяции можно выделить две задачи.

Первая касается отыскания условий возможности интерполяции классическими сплайнами, согласованной с кусочной, вообще говоря, $k$-монотонностью данных. Вторая задача связана непосредственно с построением комонотонной или ковыпуклой интерполяции. Интерес в этой связи представляют методы, допускающие расширение классической конструкции за счёт введения управляющих параметров.

Для локальных методов $k$-монотонной кубической сплайн-интерполяции класса $C^1$ обе задачи исследованы достаточно полно. Такие условия были установлены теоремами о необходимых и достаточных условиях монотонности[3] сплайна или его выпуклости[4] на всей области задания. Методы и алгоритмы построения локальных изогеометрических интерполяционных сплайнов, в том числе и основанные на этих условиях, широко представлены в литературе. Этой же теме посвящена работа [5] автора диссертации. В силу локальности конструкции, задачи комонотонной или ковыпуклой интерполяции решаются разбиением данных на области монотонности или выпуклости.

---

[2] *де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.

[3] *Fritsch F. N., Carlson R. E.* Monotone piecewise cubic interpolation // SIAM J. Numer. Anal. — 1980. — V. 17, № 2. — P. 238–246.

[4] *Schmidt J. W., Hess W.* Shape-preserving $C^2$ histopolation // J. Approx.Theory. — 1993. — V. 75. — P. 325–345.

В нелокальных методах монотонной и выпуклой интерполяции класса $C^2$ технологии получения априорных условий долгое время не существовало, для проверки будет ли сплайн формосохраняющим фактически требовалось строить сам сплайн. Явные формулы априорной проверки появились с публикацией результатов В. Л. Мирошниченко[5]. Им и установлены первые достаточные условия монотонности и выпуклости нелокального сплайна. Некоторые достаточные условия рассматривались в работах В. И. Пинчукова. Ю. С. Волков на основе предложенного им нового представления нелокального сплайна через разложение его производной по базису из параболических $B$-сплайнов получил достаточные условия монотонности, отличные от условий Мирошниченко. Для сплайнов второй степени условия $k$-монотонности исследовали Ю. С. Волков и В. Т. Шевалдин (2012). В задаче построения нелокальной монотонной или выпуклой кубической сплайн-интерполяции, изначально предлагались методы, основанные на обобщенных конструкциях, в которых выбор параметров натяжения на проблемных участках либо был сильно ограничен за счет фактического уменьшения количества параметров, чтобы не нарушать условия применимости метода, либо носил скорее эвристический характер. Вслед за результатами В. Л. Мирошниченко (1984, 1990) в которых впервые были приведены явные формулы априорной оценки данных с точки зрения формосохраняющей интерполяции, появились и методы автоматического выбора параметров натяжения. А идея Ю. С. Завьялова (1996) заложила возможности гарантированного выбора параметров при построении нелокальной комонотонной или ковыпуклой сплайн-интерполяции.

На начальных этапах исследований в направлении формосохранения при интерполяции нелокальными сплайнами комонотонность и ковыпуклость вообще не обсуждались. Попытка разобраться в этом вопросе предпринималась в работах Ю. С. Завьялова (1997) и автора [1]. Однако вопрос об условиях комонотонности и ковыпуклости нелокальной сплайн интерполяции классическим кубическим сплайном класса $C^2$, ввиду невозможности использования для этих целей традиционного классического представления сплайна и отсутствия в то время других подходящих его представлений, не ставился, хотя задел[6] к этому времени

[5] *Мирошниченко В. Л.* Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of function'84. Proc. Int. Conf. Sofia: Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 1984, P. 610–620.

[6] *Завьялов Ю. С.* О неотрицательном решении системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. матем. журн. — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1303–1307.

уже был.

**Цель работы.** Целью работы является вывод простых, и легко проверяемых априорных условий комонотонности и ковыпуклости нелокальной интерполяции классическими кубическими сплайнами класса $C^2$, а также исследование возможности применения таких условий для разработки алгоритмов построения нелокальных изогеометрических интерполяционных сплайнов с использованием обобщений на основе классического кубического сплайна.

**Методы исследования.** В рамках исследований по теме представленной работы использовались методы линейной алгебры, математического анализа и вычислительной математики.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором лично.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Для нового класса трёхдиагональных систем линейных уравнений установлены условия неотрицательности решения, обобщающие условия В. Л. Мирошниченко и Ю. С. Завьялова

2. Установлены условия на исходные данные, при которых классический кубический сплайн класса $C^2$ обладает свойствами комонотонности или ковыпуклости.

3. Рассмотрены обобщения нелокальных кубических сплайнов для решения задачи выпуклой интерполяции. Разработан алгоритм автоматического выбора параметров натяжения, близких к оптимальным.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты представленных исследований устанавливают новые свойства классического кубического сплайна, связанные с задачей нелокальной изогеометрической, а именно, комонотонной или ковыпуклой интерполяции, существенно проясняют картину в плане возможностей классического сплайна, позволяют проводить анализ данных и выявлять в них проблемные участки. На основе априорных условий возможно построение алгоритмов автоматического выбора параметров в обобщенных конструкциях кубического сплайна, для гарантированного наследования формы данных при их интерполяции.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации в целом и отдельные её разделы докладывались на Третьем и Четвёртом Сибирских конгрессах по прикладной и индустриальной математике «ИН-

ПРИМ» (Новосибирск, 1998, 2000), Международной конференции «Теория приближения функций и операторов» (Екатеринбург, 2000), Международной конференции «Геометрия и приложения» (Новосибирск, 2000), Сибирской конференции, посвящённой памяти Ю. С. Завьялова, «Методы сплайн-функций» (Новосибирск, 2001), Международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004 (Новосибирск, 2004), Российской конференции, посвящённой 50-летию ИМ СО РАН (Новосибирск, 2007), Международной конференции «Функциональные методы в теории аппроксимации и теории операторов III» (Киев, 2009), Всероссийской конференции, приуроченной к 80-летию академика С.К. Годунова (Новосибирск, 2009), Российской конференции «Методы сплайн-функций», посвящённой 80-летию со дня рождения Ю.С. Завьялова (Новосибирск, 2011), Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2011 (Новосибирск, 2011), Международной конференции по Современному Анализу (Донецк, 2011), Международной конференции «Теория аппроксимации функций и её приложения» (Каменец-Подольский, 2012), а также на научных семинарах отдела численных методов математического анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (рук. к.ф.-м.н. В. Л. Мирошниченко, д.ф.-м.н. С. И. Фадеев), на Школе-семинаре С. Б. Стечкина по численному анализу Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (рук. академик В. И. Бердышев), на Общеинститутском математическом семинаре Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (рук. академик Ю. Г. Решетняк).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 5 статьях, 3 из которых в журналах из перечня ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 93 наименований. Объём диссертации 113 страниц, в тексте содержится 15 иллюстраций.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткое описание проблематики, даются основные понятия и определения. Объектом исследования является нелокальный кубический сплайна $S(x)$ класса $C^2[a,b]$, интерполирующий в узлах сетки $\Delta$ значения $\{f_i\}$, который на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ можно представить в виде

$$S(x) \;=\; (1-t)f_i + tf_{i+1} + \phi(1-t)h_i^2 M_i + \phi(t)h_i^2 M_{i+1}, \qquad (1)$$

где $\phi(t) = (t^3 - t)/6$, $t = (x - x_i)/h_i$ , $h_i = x_{i+1} - x_i$, $M_i = S''(x_i)$, и производные которого в концевых точках отрезка $[a, b]$ принимают значения известных первых $f'_a$, $f'_b$, либо, соответственно, вторых $f''_a$, $f''_b$ производных функции на концах отрезка:

$$S'(a) = f'_a, \qquad S'(b) = f'_b, \tag{2}$$

либо

$$S''(a) = f''_a, \qquad S''(b) = f''_b. \tag{3}$$

Неизвестные узловые значения вторых производных сплайна $M_i$ называются моментами и находятся из системы линейных уравнений, определяемой условиями гладкости сплайна класса $C^2$:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, $d_i = 6\delta_i$, и вытекающими из (2) или, соответственно, (3) краевыми условиями

$$2M_0 + M_1 = d_0, \qquad M_{n-1} + 2M_n = d_n, \tag{5}$$

или

$$M_0 = d_0, \qquad M_n = d_n, \tag{6}$$

где $d_0 = 6(f[x_0, x_1] - f'_a)/(x_1 - x_0)$, $d_n = 6(f'_b - f[x_{n-1}, x_n])/(x_n - x_{n-1})$ в первом случае и $d_0 = f''_a$, $d_n = f''_b$ — во втором.

Первая глава является вспомогательной. В ней получены условия, при которых система линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{d}$ с трёхдиагональной матрицей специального вида и неотрицательной правой частью имеет неотрицательное решение. Этот результат используется для описания условий согласованности знаковых схем вектора решения и вектора правой части для систем с трёхдиагональными матрицами без отрицательных элементов.

Матрица $\boldsymbol{A}$ рассматривается в двух представлениях: традиционном ленточном и блочно-трёхдиагональном:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & & & 0 \\ C_1 & A_1 & B_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C_{m-1} & A_{m-1} & B_{m-1} \\ 0 & & & C_m & A_m \end{pmatrix}$$

Квадратные диагональные блоки $A_j$, $j = 0, \ldots, m$, различных, вообще говоря, порядков, определяют размерности прямоугольных внедиагональных блоков $B_j$ и $C_{j+1}$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Матрицы, для которых выполняются соотношения $c_{i+1}b_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, n-1$, называют нестрого якобиевыми.

Знаковой схемой $\operatorname{sgn} \boldsymbol{v}$ вектора $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ с компонентами $v_i$ будем называть вектор $\operatorname{sgn} \boldsymbol{v} \equiv (\operatorname{sgn} v_0, \operatorname{sgn} v_1, \ldots, \operatorname{sgn} v_n)^T$ ($\operatorname{sgn} x = 1$ при $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ при $x < 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$ при $x = 0$). Вектор называем неотрицательным $\boldsymbol{v} \geq 0$, если все $v_i \geq 0$.

Матрицей монотонного вида называется матрица $\boldsymbol{A}$, для которой из условия $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \geq 0$ следует $\boldsymbol{v} \geq 0$.

Решение системы линейных уравнений $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$ назовём согласованным с правой частью $\boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_n)^T$, если $\operatorname{sgn} \boldsymbol{z} = \operatorname{sgn} \boldsymbol{d}$.

Раздел 1.2 посвящён вопросу об условиях наследования решением системы знаковой схемы правой части для систем с неотрицательными матрицами. Решение вопроса основывается на следующих утверждениях.

**Теорема 1.2** . *Пусть элементы матрицы* $\boldsymbol{A}$ *и вектора правой части* $\mathbf{d}$ *системы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \mathbf{d}$ *неотрицательны, и матрица* $\boldsymbol{A}$ *со строгим диагональным преобладанием по столбцам:* $a_0 - c_1 > 0$, $a_i - b_{i-1} - c_{i+1} > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_n - b_{n-1} > 0$. *Тогда решение* $\boldsymbol{z}$ *будет неотрицательным, если выполнены неравенства*

$$
\begin{aligned}
&d_0 - \frac{b_0}{a_1} d_1 \geq 0, \\
&d_i - \frac{c_i}{a_{i-1}} d_{i-1} - \frac{b_i}{a_{i+1}} d_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\
&d_n - \frac{c_n}{a_{n-1}} d_{n-1} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Условия на правую часть в теореме 1.2 совпадают с условиями леммы В. Л. Мирошниченко, полученными для систем, с матрицами, имеющими диагональное преобладание по строкам. Однако для знакопеременной правой части, оба эти утверждения не применимы. Тем не менее, следующая лемма позволяет воспользоваться идеей, заложенной в них.

**Лемма 1.4.** *Пусть система* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \mathbf{d}$ *с матрицей, подчиняющейся условиям теоремы* 1.2 *имеет правую часть* $\mathbf{d}$, *компоненты* $d_i$ *которой отличны от нуля и* $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}\{\operatorname{sgn} \boldsymbol{d}\}$ *— диагональная матрица. Для* *того чтобы знаковые схемы векторов* $\boldsymbol{z}$ *и* $\boldsymbol{d}$ *совпадали, достаточно, чтобы матрица* $\boldsymbol{DAD}$ *была матрицей монотонного вида.*

Таким образом в некоторых случаях удаётся свести задачу об условиях согласованности решения системы с неотрицательной матрицей и знакопеременной правой частью, к задаче об условиях неотрицательности решения системы с неотрицательной правой частью и нестрого якобиевой матрицей. Решение последней задачи приводится в разделе 1.3.

**Теорема 1.5.** *Пусть трёхдиагональная матрица* $\boldsymbol{A}$ *с диагональным преобладанием по столбцам удовлетворяет условиям* $c_{i+1}b_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, n-1$ *и блоки* $A_j$, $j = 0, \ldots, m$ *её блочной структуры не содержат вне главной диагонали положительных элементов. Пусть* $\boldsymbol{D}_A = \mathrm{diag}(A_0, A_1, \ldots, A_m)$ *— блочно-диагональная матрица,* $I$ *— единичная матрица и* $\boldsymbol{G} = 2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_A^{-1}$. *Тогда матрица* $\boldsymbol{GA}$ *является матрицей монотонного вида.*

Отметим, что утверждение теоремы 1.5, как показано Ю. С. Завьяловым (1996), верно и в случае диагонального преобладания по строкам.

Свойства матриц монотонного вида позволяют сформулировать следующий результат.

**Теорема 1.6.** *Для того чтобы система уравнений* $\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{d}$ *с матрицей, для которой выполнены условия теоремы 1.5 имела неотрицательное решение* $\boldsymbol{z} \geq 0$ *достаточно, чтобы выполнялось условие* $\boldsymbol{Gd} \geq \boldsymbol{0}$.

Результаты главы 1 применяются в главе 2 при изучении задачи изогеометрической интерполяции классическими кубическими сплайнами.

При интерполяции нестрого монотонных или нестрого выпуклых данных приходится считаться с наличием в них линейных участков, что налагает дополнительные ограничения на интерполяцию функциями из заданного класса гладкости и порождает проблемы вплоть до разрешимости задачи изогеометрической интерполяции.

В разделе 2.1 приводятся результаты о монотонности и выпуклости интерполяции классическими $C^2$-сплайнами, даётся постановка задачи комонотонной и ковыпуклой интерполяции.

Под ковыпуклой сплайн-интерполяцией понимается задача построения сплайна $S(x)$, удовлетворяющего условиям:

а) на каждом промежутке $[x_i, x_{i+k}]$ выпуклости данных, $k \geq 3$ выполняется условие: $S''(x)\delta_j \geq 0$ для всех $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = i+1, \ldots, i+k-2$;

б) если $x_i$ — узел перемены направления выпуклости (вверх или вниз) данных, т.е. выполняются условия $\delta_i\delta_{i+1} < 0$, то $S''(x)$ на промежутке $(x_i, x_{i+1})$ меняет знак только один раз.

**Теорема 2.2.** *Пусть на сетке $\Delta$ вторые разделённые разности $\delta_i$ функции $f(x)$ не обращаются в нуль. Тогда для того, чтобы сплайн* (1) *с краевыми условиями* (2) *или* (3) *был ковыпуклым необходимо и достаточно, чтобы совпадали знаковые схемы решения и правой части систем* (4),(5) *или* (4),(6), *соответственно.*

Условия совпадения знаковых схем получаются применением леммы 1.4 и теоремы 1.6. Ковыпуклость на всём отрезке следует из представления (1) и условий (2) или (3).

В частности, если в наборе $\{d_i\}$ (а значит и $\{\delta_i\}$) всего одна перемена знака $d_0 > 0, \ldots, d_l > 0$ и $d_{l+1} < 0, \ldots, d_n < 0$, то достаточные условия ковыпуклости сплайна (1) с краевыми условиями (2) или (3) имеют вид

$$
\begin{aligned}
& d_0 - d_1\frac{b_0}{2} \ge 0, \\
& d_j - d_{j-1}\frac{\mu_j}{2} - d_{j+1}\frac{\lambda_j}{2} \ge 0, \ \ j = 1, \ldots, l-2, \\
& d_{l-1} - d_{l-2}\frac{\mu_{l-1}}{2} - d_l\frac{2\lambda_{l-1}}{w_l} + d_{l+1}\frac{\lambda_{l-1}\lambda_l}{w_l} \ge 0, \\
& d_l - d_{l-1}\frac{\mu_l}{2} \ge 0, \\
& d_{l+1} - d_{l+2}\frac{\lambda_{l+1}}{2} \le 0, \\
& d_{l+2} + d_l\frac{\mu_{l+1}\mu_{l+2}}{w_l} - d_{l+1}\frac{2\mu_{l+2}}{w_l} - d_{l+3}\frac{\lambda_{l+2}}{2} \le 0, \\
& d_j - d_{j-1}\frac{\mu_j}{2} - d_{j+1}\frac{\lambda_j}{2} \le 0, \ \ j = l+3, \ldots, n-1, \\
& d_n - d_{n-1}\frac{c_n}{2} \le 0,
\end{aligned}
$$

где $b_0 = c_n = 1$ в случае краевых условий (2) и $b_0 = c_n = 0$ в случае краевых условий (3).

Данные условия с точностью до знаков неравенств совпадают с условиями выпуклой интерполяции, получающимися в результате применения теоремы 1.2, за исключением четырёх средних неравенств, т.е. в приведённом случае соотношения усложняются локально.

Комонотонной сплайн-интерполяцией называют задачу построения сплайна $S(x)$, удовлетворяющего условиям:

а) на каждом промежутке $[x_i, x_{i+k}]$ монотонности данных, $k \geq 3$ выполняется условие: $S'(x)f[x_j, x_{j+1}] \geq 0$ для всех $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = i+1, \ldots, i+k-2$;

б) если $x_i$ — узел перемены направления монотонности данных, т.е. выполняются условия $f[x_{i-1}, x_i]f[x_i, x_{i+1}] < 0$, $f[x_{i-2}, x_{i-1}]f[x_{i-1}, x_i] > 0$, $f[x_{i+1}, x_{i+2}]f[x_{i+2}, x_{i+3}] > 0$, то $S'(x)$ на промежутке $(x_{i-1}, x_{i+1})$ меняет знак только один раз.

Условия комонотонности сплайна устанавливаются в разделе 2.3. Для этого в разделе 2.2 приведено предложенное Ю. С. Волковым (2002) новое, нетрадиционное, представление $C^2$-сплайна, основанное на разложении его производной

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_k B_k(x) \tag{7}$$

по базису $B_k$, $k = 0, \ldots, n+1$, из нормализованных $B$-сплайнов второй степени с носителями $[x_{k-2}, x_{k+1}]$. Сплайн $S(x)$ полностью определяется параметрами $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{n+1})$. Выполнение интерполяционных условий $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, n$, приводит к системе уравнений относительно параметров $\boldsymbol{\beta}$, для однозначного определения которых задаются ещё первая или вторая производные на концах. Тогда система, определяющая сплайн, например с условиями (2), имеет вид:

$$\begin{cases} \beta_0 = f'_a, \\ \dfrac{\lambda_{i-1}}{3}\beta_{i-1} + \dfrac{(1 + \mu_{i-1} + \lambda_i)}{3}\beta_i + \dfrac{\mu_i}{3}\beta_{i+1} = f[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, n, \\ \beta_{n+1} = f'_b. \end{cases} \tag{8}$$

Обозначим правую часть

$$\boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_n, d_{n+1})^T = (f'_a, f[x_0, x_1], \ldots, f[x_{n-1}, x_n], f'_b)^T.$$

Ее знаковая схема характеризует монотонность или кусочную монотонность данных.

**Теорема 2.4.** *Пусть в системе уравнений* (8), *определяющей сплайн* $S(x)$, *выполнены неравенства*

$$d_0 > 0, \ldots, d_l > 0, \; d_{l+1} < 0, \ldots, d_{n+1} < 0. \tag{9}$$

*Тогда если $\beta_i d_i > 0$, $i = 0, \ldots, n+1$, то существует единственная точка $\xi \in [x_{l-1}, x_{l+1}]$ такая, что $S'(x) \geq 0$ для $x \in [a, \xi]$, $S'(x) \leq 0$ для $x \in [\xi, b]$.*

В этом наиболее востребованном случае одной перемены знака в наборе разделённых разностей достаточные условия комонотонности классического сплайна даются теоремой.

**Теорема 2.6.** *Если направление монотонности данных меняется с возрастания на убывание в $l$-ом узле (9), то кубический сплайн с граничными условиями (2) будет комонотонным при выполнении условий*

$$d_i - d_{i-1}\frac{\lambda_{i-1}}{1+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}} - d_{i+1}\frac{\mu_i}{1+\mu_i+\lambda_{i+1}} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, l-2, \tag{10}$$

$$d_{l-1} - d_{l-2}\frac{\lambda_{l-2}}{1+\mu_{l-3}+\lambda_{l-2}} - d_l\frac{\mu_{l-1}(1+\mu_l+\lambda_{l+1})}{w_l} + d_{l+1}\frac{\mu_l\mu_{l-1}}{w_l} \geq 0, \tag{11}$$

$$d_l - d_{l-1}\frac{\lambda_{l-1}}{1+\mu_{l-2}+\lambda_{l-1}} \geq 0, \tag{12}$$

$$d_{l+1} - d_{l+2}\frac{\mu_{l+1}}{1+\mu_{l+1}+\lambda_{l+2}} \leq 0, \tag{13}$$

$$d_{l+2} + d_l\frac{\lambda_l\lambda_{l+1}}{w_l} - d_{l+1}\frac{\lambda_{l+1}(1+\mu_{l-1}+\lambda_l)}{w_l} - d_{l+3}\frac{\mu_{l+2}}{1+\mu_{l+2}+\lambda_{l+3}} \leq 0, \tag{14}$$

$$d_i - d_{i-1}\frac{\lambda_{i-1}}{1+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}} - d_{i+1}\frac{\mu_i}{1+\mu_i+\lambda_{i+1}} \leq 0, \quad i = l+3, \ldots, n, \tag{15}$$

*где полагаем $\mu_{-1} = \lambda_{n+1} = 1$ и $w_l = (1+\mu_{l-1}+\lambda_l)(1+\mu_l+\lambda_{l+1}) - \mu_l\lambda_l$.*

В разделе 2.3 приводятся результаты о кусочно монотонной интерполяции класическим сплайном в представлении, использующем $B$-сплайновое разложение.

В главе 3 рассматривается задача построения выпуклых нелокальных обобщённых кубических сплайнов, интерполирующих данные, для которых условия выпуклости классического кубического сплайна класса $C^2$ могут не выполняться.

В разделе 3.1 приведена обобщающая представление (1) конструкция: на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн задаётся формулой

$$S(x) \;=\; \sigma(x) + \phi(q_i, 1-t)\, h_i^2 M_i + \phi(p_{i+1}, t)\, h_i^2 M_{i+1}, \tag{16}$$

где функция $\phi(p,t) \in C^2[0,1]$, как функция от $t$, имеет свободный параметр $p$ для управления поведением сплайна. Из условий интерполяции вытекают ограничения для всех значений $p$:

$$\phi(p,0) = \phi(p,1) = \phi''(p,0) = 0, \quad \phi''(p,1) = 1$$

(производная берётся по $t$). Кроме того, должны быть выполнены условия

$$\lim_{p\to 0} \phi(p,t) = (t^3 - t)/6, \quad \lim_{p\to\infty} \phi(p,t) \equiv 0,$$

которые и определяют возможность получить интерполянт желаемой формы, промежуточной между линейным и кубическим сплайном, при наличии непрерывности и монотонности по параметру $p$:

$$\phi(p,t) \le \phi(\bar{p},t) \qquad \text{при } \bar{p} \ge p \ge 0.$$

Показано, что обобщенный сплайн $S(x)$ с заданными на концах отрезка значениями первой или второй производной существует и единствен, поскольку трёхдиагональная матрица определяющей системы относительно неизвестных $M_i$, зависящая от полного набора параметров $p_i, q_i$, заданных (и, вообще говоря, различных) на каждом интервале сетки, имеет при некоторой допустимой нормировке строк и при дополнительном условии

$$\phi'(p,0) < 0, \quad \phi'(p,0) + \phi'(p,1) > 0 \qquad \text{при } p \ge 0 \tag{17}$$

диагональное преобладание по столбцу. Это позволяет в разделе 3.2 использовать результаты первой главы о достаточных условиях неотрицательного решения системы и второй главы о достаточных условиях выпуклости классического сплайна и сформулировать алгоритм автоматического выбора одновременно всех параметров $p_i, q_i$, при которых обобщенный сплайн является выпуклым. При этом нелокальная конструкция позволяет сплайну локально не отличаться от кубического классического там, где выполнены достаточные условия выпуклости и отличаться некоторым натяжением на участках, где условия нарушаются. В разделе 3.3 результат работы алгоритма проиллюстрирован на примере обобщенного рационального сплайна Шпэта. Пример демонстрирует как связаны область параметров, описываемых достаточными условиями, гарантирующими выпуклость сплайна, и область всех параметров, при которых сплайн является выпуклым, и тем самым показывает, что достаточные условия выпуклости обобщенного сплайна конструктивны и близки к оптимальным.

В Заключении перечислены основные результаты работы, представленные к защите. Далее приведён список цитированной литературы, состоящий из 93 наименований.

Автор выражает благодарность научному руководителю Ю. С. Волкову и В. Л. Мирошниченко за постоянное внимание и поддержку данной работы.

**Основные результаты диссертации опубликованы в работах:**

1. *Богданов В.В.* Об алгоритме построения обобщённого сплайна, сохраняющего направления выпуклости данных // Вычислительные системы. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. — Вып. 159: Сплайн-функции и их приложения. — С. 72–86.

2. *Богданов В. В., Волков Ю. С.* Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2006. — Т. 9, № 1. — С. 5–22.

3. *Богданов В. В.* Достаточные условия комонотонной интерполяции кубическими сплайнами класса $C^2$ // Мат. труды. — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 3–13.

4. *Богданов В. В.* Достаточные условия неотрицательности решения системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 544–550.

5. *Завьялов Ю.С., Богданов В.В.* Изогеометрическая эрмитова интерполяция обобщёнными кубическими сплайнами // Сплайны и их приложения. — Новосибирск, 1991. — Вып. 142: Вычислительные системы. — С. 15–46.

Богданов Владимир Васильевич

**Изогеометрическая интерполяция нелокальными кубическими сплайнами и их обобщениями**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Подписано в печать 04.03.2014 Формат 60x84 1\16
Усл. печ. л. 1,25 Объем 20 стр. Тираж 100 экз. Заказ № 46

Отпечатано Омега Принт
630090, г. Новосибирск, пр. Ак.Лаврентьева,6
email: omegap@yandex.ru