На правах рукописи

ТАТАРИНОВА Людмила Николаевна

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Специальность 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата педагогических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре алгебры, геометрии, теории и методики обучения математике ГОУ ВПО МО «Коломенский государственный педагогический институт»

Научный руководитель: доктор педагогических наук, профессор Назиев Асланбек Хамидович

Официальные оппоненты: доктор педагогических наук, профессор Утеева Роза Азербаевна

кандидат педагогических наук Шуркова Мария Владимировна

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского»

Защита диссертации состоится 27 октября 2010 года в 12.00 часов на заседании объединенного диссертационного совета ДМ 850.007.03 при Московском городском педагогическом университете и Тульском государственном педагогическом университете им. Л.Н. Толстого по адресу: 127521, г. Москва, ул. Шереметьевская, дом 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО МГПУ по адресу: 129226, г. Москва, 2-ой Сельскохозяйственный проезд, дом 4.

Автореферат размещен на Интернет-сайте ГОУ ВПО МГПУ: www.mgpu.ru

Автореферат разослан «23» сентября 2010 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор педагогических наук,
профессор Гриншкун В.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Осуществляемая в наши дни модернизация российского образования ставит перед учителями и специалистами по методике обучения новые задачи, требует по-новому осмысливать цели, содержание, методы, формы и средства обучения. К основным направлениям модернизации российского образования относятся, среди прочих, гуманизация и гуманитаризация математического образования.

Исследование проблемы гуманитаризации математического образования сопровождалось большими дискуссиями. Г.И. Саранцев[1] отмечает, что «сутью гуманитаризации математического образования является отражение в нём деятельностной природы знания. Такое понимание гуманитаризации, — подчеркивает он, — предполагает пересмотр основных положений методики обучения математике». Так, если с содержанием математического образования принято связывать совокупность аксиом, определений и теорем, то деятельностная основа содержания должна охватывать действия (и способы деятельности, и эвристики), адекватные аксиомам, определениям, теоремам.

В традиционной методике работа с определениями является составной частью процесса формирования понятий. Проблеме формирования понятий посвящена обширная литература. Так, психолого-дидактические основы формирования понятий в процессе обучения разработаны Л. С. Выготским, П. Я. Гальпериным, В. А. Крутецким, Н. А. Менчинской, Ж. Пиаже, Н.Ф. Талызиной, М. А. Холодной, И. С. Якиманской и др.

Теоретическим основам формирования понятий в процессе обучения математике в школе посвящены исследования М. Б. Воловича, Я. И. Груденова, В. А. Гусева, В. А. Далингера, О. Б. Епишевой, Т. А. Ивановой, Г. Л. Луканкина, Е. И. Лященко, В. М. Монахова, Ю. М. Колягина, В. И. Крупича, З. И. Слепкань, Г. И. Саранцева, А.А.Столяра, П. М. Эрдниева и др.

Методические аспекты формирования понятий в школьном курсе математики рассматриваются в работах И. В. Егорченко, А. Л. Жохова, М. И. Зайкина, Л. С. Капкаевой, Л. М. Наумовой, М. А. Родионова, А. В. Усовой, Р. А. Утеевой, М.Г. Макарченко, В.И. Крупича, В. В. Никитина, К.А. Рупасова и др.

При несомненной важности и огромном значении исследований о формировании понятий, следует отметить, что опора традиционной методики формирования понятий на классическую логику приводит к

---

[1] Г.И. Саранцев. Методика обучения математике в средней школе. — М.: Просвещение, 2002. — С. 29–30.

неправомерному сужению поля деятельности при работе с определениями. Действительно, процесс формирования понятий (согласно учебнику методики обучения математике) «состоит из мотивации введения понятия, выделения его существенных свойств, усвоения определения, применения понятия, понимания связи изучаемого понятия с другими, изученными ранее»[2]. Как видим, определение лишь усваивается, а вся остальная деятельность направлена не на определение, а на то, что определяется (понятие). В частности, согласно этому толкованию, применяется не определение, а (определяемое) понятие. Усвоение же определения включает в себя распознавание объектов, принадлежащих понятию, выведение следствий из принадлежности понятию, конструирования объектов, принадлежащих понятию, и их совокупностью. Однако, часто ученики, успешно решающие задачи на распознавание или так называемую принадлежность объекта к множеству, указанному в определении, при решении практических задач допускают ошибки. Например, ученикам предлагается построить график функции

$$y = |x^2 - 4|.$$

Ученики применяют определение модуля со следующей ошибкой:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4, \textit{если } x \geq 0; \\ -(x^2 - 4), \textit{если } x < 0. \end{cases}$$

Разумеется, каждый учитель как-то исправляет подобные ошибки, но это делается независимо от классической теории формирования понятий. Классическая теория не поможет в решении подобных задач, так как не работает с предметными переменными. Дело в том, что классическая логика имеет дело с субъектно-предикатной формой суждений, в то время как «лишь немногие мысли можно выразить в субъектно-предикатной форме; многоместные отношения и последовательности кванторов жизненно необходимы»[3]. Упоминание в этой связи многоместных отношений и кванторов является прямым указанием на то, что основой для построения методики преподавания *математики* (и, в частности, работы с определениями в ней) должна служить *математическая*, а не классическая (аристотелевская) логика.

В связи с отсутствием необходимой теории применения определений в классической логике, ученики часто вообще не применяют определения при решении задач. Например, усвоив определение арифметического квадратного корня, ученики при решении иррациональных уравнений, вместо применения этого определения, используют метод возведения в

---

[2] Г.И. Саранцев. Методика обучения математике в средней школе. — М.: Просвещение, 2002. — С. 40.

[3] H. Freudenthal. Mathematics as an educational task. Part I / Dordrecht: Reidel, 1975. — P. 85. (Мы приводим свой перевод с оригинала)

квадрат обеих частей уравнения. В результате, могут быть приобретены посторонние корни.

Таким образом, в методике обучения математике в средней школе имеется **противоречие:**

между необходимостью обучения школьников применению определений в процессе изучения ими математики и отсутствием соответствующей методики, основанной на положениях математической логики.

Устранение указанного противоречия свидетельствует о необходимости и об **актуальности исследования.**

Проблема исследования состоит в построении, основанных на положениях математической логики, теории и методики обучения применению определений в курсе математики средней школы.

Объект исследования – процесс обучения математике в общеобразовательных учреждениях.

Предмет исследования – обучение применению определений в курсе математики средней школы.

Цель исследования – разработать теорию и методику обучения применению определений в курсе математики средней школы.

Гипотеза исследования: *если*, основываясь на достижениях математической логики, *разработать* теорию и методику обучения школьников применению определений *и внедрить* эту методику в практику обучения математике в средней школе, *то это будет способствовать* повышению качества математической подготовки учащихся средней школы.

Сформулированные цель и гипотеза исследования определяют его **задачи:**

1. Провести сравнительный анализ работы с определениями, совершаемой в рамках классической теории формирования понятий и теории определений математической логики.
2. Выявить основные направления и особенности обучения применению определений в курсе математики средней школы в соответствии с современной теорией определений;
3. Разработать теоретические положения обучения применению определений в курсе математики.
4. Разработать методику обучения применению определений в курсе математики средней школы, включающую типологию упражнений, направленных на формирование умения применять определения.
5. Экспериментально проверить эффективность разработанной методики обучения применению определений в курсе математики средней школы.

Теоретико-методологическую основу исследования составляют:

– теория системного подхода и её применение к обучению математике (В.И. Крупич, В.С. Леднев, В.М. Монахов, А.М. Пышкало и др.);

– деятельностный подход и теория развивающего обучения (Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, Л.В. Занков, Н.Ф.Талызина, Д.Б. Эльконин и др.);

– работы по философии и методологии математики и математического образования (А. Д. Александров, В. И. Арнольд, В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, М. Б. Волович, Г.Д. Глейзер, Б. В. Гнеденко, В.А. Гусев, В.А. Далингер, Г.В. Дорофеев, А.Л. Жохов, А.Н. Колмогоров, Ю.М. Колягин, Л.Д. Кудрявцев, Г.Л. Луканкин, В. М. Монахов, А.Г. Постников, А.Х. Назиев, А. Я. Хинчин, Г. Вейль, Д. Гильберт, А. Пуанкаре, Д. Пойа, Б. Рассел, Г. Фройденталь и др.);

– теоретические исследования по проблемам содержания школьного математического образования (М.И. Башмаков, Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, В.А. Далингер, Г.В. Дорофеев, И. В. Дробышева, Ю. А. Дробышев, Ю.М. Колягин, А.Г. Мордкович, В.А. Оганесян, А.Х. Назиев, П.В. Семенов, А.С. Симонов, И.М. Смирнова, А.А. Столяр и др.). При решении сформулированных задач были использованы следующие **методы исследования**:

– изучение школьных программ, учебных и учебно-методических пособий, материалов и публикаций по исследуемой проблеме;

– изучение и анализ философской, научно-методической и психолого-педагогической литературы по теме исследования;

– изучение и обобщение педагогического опыта работы учителей математики средней школы;

– обобщение собственного опыта преподавания математики в средней школе;

– изучение и анализ письменных работ учащихся;

– наблюдение, анкетирование школьников;

– проведение педагогического эксперимента по проверке методических положений работы, статистические методы обработки полученных результатов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Проблема обучения применению определений в курсе математики средней школы решена на принципиально новой основе – использовании теории определений математической логики.

2. Создана методика обучения школьников применению определений, в рамках которой выделены основные этапы обучения

применению определений, разработан общий вид формулировок заданий, соответствующих указанным этапам обучения.

Теоретическая значимость заключается в обосновании необходимости обучения школьников применению определений на основе математической логики. Разработаны теоретические положения обучения применению определений, выявляющие роль выполнения подстановок при обучении применению определений.

Практическая значимость исследования состоит в том, что в обучении применению определений выделены три этапа, разработаны основные виды формулировок заданий, соответствующих данным этапам. В ходе исследования создана программа специального курса «Теория и методика самообучения применению определений в курсе математики средней школы».

Разработанная в диссертации методика обучения применению определений в курсе математики средней школы может быть использована в практической деятельности учителя, при создании учебно-методических пособий для учащихся и студентов.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обусловлены:

– разносторонним теоретическим анализом проблемы;

– согласованностью выдвигаемых теоретических положений с теоретическими разработками в области математической логики, психологии, педагогики;

– многообразием и полнотой изученного фактического материала;

– результатами экспериментальной проверки, подтвердившей справедливость основных положений диссертации.

На **защиту** выносятся следующие положения:

1. Работу с определениями в процессе обучения математике следует строить на основе теории определений, разработанной на базе математической логики. Согласно этой теории применить определение — значит воспользоваться результатом правильной подстановки в определение для введения (исключения) определяемого термина.

2. Обучение применению определений должно строиться согласно следующему плану: первым этапом является обучение выполнению указанных подстановок в указанное определение; вторым – обучение получению данных предложений (неизвестных ученику заранее) подстановками в указанное определение; третьим – обучение умению видеть возможность получения данных предложений посредством подстановок (неизвестных заранее) в определения (неизвестные заранее).

Основные этапы исследования

На первом этапе исследования осуществлялись изучение и анализ математической, психолого-педагогической и научно-методической литературы, посвященной различным аспектам выделенной проблемы. Работа с определениями в классической теории формирования понятий была сопоставлена с работой с определениями в логико-математической теории. Выявлены возможности использования этих теорий для построения методики обучения применению определений, соответствующей целям обучения математике. Теоретический анализ литературы, данные, полученные в результате опроса учителей и учащихся (констатирующего эксперимента), послужили основанием для формулирования цели, задач исследования и формулировки рабочей гипотезы. Итогом первого этапа исследования стала разработка теоретической базы исследования.

На втором этапе исследования проводился поисковый эксперимент. В ходе этого эксперимента на основе выделенных требований была разработана методика обучения применению определений в курсе математики средней школы.

На третьем этапе был проведен обучающий эксперимент. Его целью явилась проверка эффективности разработанной методики. Полученные теоретические и экспериментальные результаты были обобщены и сделаны выводы.

Апробация основных положений и результатов исследования проводилась путем их использования в работе учителей; в виде докладов и выступлений на конференциях и семинарах: XXI Всероссийский семинар преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Модернизация школьного математического образования и проблемы подготовки учителя математики» (Санкт-Петербург, 2002); семинар «История и перспективы развития образования в Московской области» (Коломна, 2002); III Международная научно-методическая конференция «Современные проблемы преподавания математики и информатики» (Волгоград, 2006); научно-методические семинары кафедры алгебры, геометрии, теории и методики обучения математике ГОУ ВПО МО «Коломенский государственный педагогический институт» (Коломна, 2002-2007).

Внедрение разработанных методических рекомендаций осуществлялось в общеобразовательных учреждениях: МОУ «гимназия №20» г. Люберцы и ГОУ «гимназия №1566» ЮВОУО ДО г. Москвы.

Структура диссертации определена логикой и последовательностью решения задач исследования. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, определены цели и задачи исследования, выбраны объект и предмет исследования в соответствии с поставленной целью, сформулирована гипотеза исследования, раскрыта новизна и практическая значимость работы, выделены этапы исследования, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Теоретические основы обучения применению определений в курсе математики средней школы» представлено теоретическое исследование указанной проблемы. Рассмотрены два подхода к использованию определений: в современной математической логике и в, так называемой, классической логике.

В первом параграфе приведены необходимые сведения о математическом образовании. Согласно Г. Гегелю и А. Швейцеру, образование предназначено для того, чтобы помочь человеку сделать себя во всех отношениях духовным существом — то есть существом, у которого разум господствует над убеждениями и помыслами. Вся математика как учебная дисциплина представляет собой отшлифованную веками систему прекрасно подобранных упражнений, выполнение которых приучает человека к господству его разума над его убеждениями и помыслами. В знания, поставляемые математикой не нужно верить, потому что истинным признаётся только то, что доказано. Изучив готовое или открыв свое доказательство, ученик сам убеждается в справедливости результата. Он сам, посредством своего разума, вносит изменения в свои представления. В других науках для подтверждения истинности предложении применяют наблюдения, опыт, специально поставленные эксперименты. В математике же используется только один метод подтверждения истинности - доказательство. Именно поэтому обучение абстрактному языку является необходимой предпосылкой и составной частью обучения математике.

Во втором параграфе приводятся основные сведения об определениях, дается классификация определений в математической логике. В виду того, что в литературе нет единого мнения по поводу природы, видов и функций определений, требований, предъявляемых к определению, уточнен смысл используемых терминов с позиций математической логики.

В этом случае под определением понимают «такое соглашение об употреблении нового термина, которое позволяет сводить вопрос об истинности или ложности предложений, содержащих этот термин, к аналогичному вопросу о предложениях, не содержащих этого термина» [4].

Причины, по которым то или иное соглашение удовлетворяет указанному требованию, могут быть различны. Согласно этому в математической логике выделяют различные виды определений:

— определения знаков отношений;

— определения знаков операций;

— определения констант.

Для каждого вида знаков существуют определенные правила, по которым строятся определения в некоторой заданной формализованной теории. Например, правила определения знаков операции выглядят следующим образом. Пусть φ - произвольное предложение некоторой теории и $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ – попарно различные переменные, среди которых содержатся все свободные переменные предложения φ. Говорят, что эквиваленция

$$\alpha=\omega(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \leftrightarrow \varphi$$

является *правильным определением знака операции ω ранга n* в указанной теории, если:

1) знак ω не встречался ранее в этой теории;

2) переменные $\alpha, \alpha_1,\ldots, \alpha_n$ попарно различны;

3) все свободные переменные предложения φ содержатся среди α, $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$;

4) для любых значений переменных $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ существует не более одного значения переменной α, при котором выполняется предложение φ.

По этому соглашению всюду, где встретится равенство «вида» $\alpha=\omega(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, его разрешается заменить предложением «вида» φ и обратно.

На практике то, что мы обозначили через $\omega(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, может обозначаться немного иначе. Например, в случае определения знака «_–_» это выглядит следующим образом:

$$\overbrace{c}^{\alpha} = \overbrace{\underset{\alpha_1}{\overset{\uparrow}{a}}\underset{\omega}{\overset{\uparrow}{-}}\underset{\alpha_2}{\overset{\uparrow}{b}}}^{\omega(\alpha_1,\alpha_2)} \leftrightarrow \overbrace{b+c=a}^{\varphi}$$

Примерами таких определений являются определения знаков операций вычитания, деления, извлечения арифметического квадратного корня и так далее.

---

[4] Назиев А. Х. Вводный курс математики (2а. Элементы математической логики): Учебное пособие / А.Х. Назиев. — Рязань: Изд-во РГПУ, 1999. С. 107.

В третьем параграфе указаны различные виды определений, рассмотренные в научно-методической литературе. Чаще всего в интерпретациях классической логики используют классификационные определения – определение понятия через ближайший род и видовые отличия. Именно такие определения рассматриваются в школьной методике преподавания математики.

Классической логикой установлен ряд требований, которым должны удовлетворять определения понятий. Все указанные правила требуют разъяснения. Однако даже различного рода разъяснения не устраняют ряд предложений, удовлетворяющих всем правилам классической логики, но не являющихся верными определениями:

Число а называется целым, если а=m-n, и m, n – натуральные.

Согласно такому «определению» из предложения 5=7,2-2,2 следует, что 5 не является целым числом. С другой стороны, из предложения 5=7-2 следует, что 5 является целым числом. Это противоречие возникает из-за отсутствия указания на то, все или некоторые m и n нужно использовать. Именно математическая теория определений обращает внимание на значимость кванторов в определении, в отличие от классической теории формирования понятий.

Рассмотрение проблемы применения определений с точки зрения математической логики позволило выявить роль подстановок в обучении применению определений. Например, определение «*арифметическим квадратным корнем из числа а называется неотрицательное число, квадрат которого равен а*» дает нам перевод одной конкретной формулы $\sqrt{a} = b$:

$$\sqrt{a} = b \leftrightarrow b \geq 0 \text{ и } b^2 = a.$$

Это определение необходимо применять и к другим различным формулам, например, к $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = y$. Для этого вместо a возьмем $x^2 - 5x + 6$ и вместо b возьмем y, то есть совершим подстановку в это определение:

$$\left[\frac{x^2 - 5x + 6}{a}, \frac{y}{b}\right](\sqrt{a} = b \leftrightarrow b \geq 0 \text{ и } b^2 = a)$$

тогда получим $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = y \leftrightarrow y \geq 0 \text{ и } y^2 = x^2 - 5x + 6$.

Исследование опирается на математическую теорию определений, так как именно ее использование позволяет дать теоретическое обоснование применения определений, которое отражено в метатеоремах. В процессе доказательства этих метатеорем объяснена необходимость изучения подстановок учащимися и показано, как расшифровывать контексты, содержащие определяемый термин. Например, принимая определение знака '$\sqrt{\ }$' операции ранга , 1 мы с легкостью исключим знак '$\sqrt{\ }$' из любого контекста вида '$\alpha = \sqrt{\beta}$', (например, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt{3}$), выбирая в качестве перевода этой формулы формулу '$\alpha = \sqrt{\beta} \leftrightarrow \alpha \geq 0 \wedge \alpha^2 = \beta$'. Но как быть с другими контекстами? Как исключить знак '$\sqrt{\ }$' из контекста $4 < 2\lg\sqrt{x}$? Классическая логика не дает ответа на этот вопрос. Решение этой задачи, содержится именно в математической логике.

Применение определений включает в себя два случая:

- Введение определяемого термина.
- Исключение определяемого термина.

Например, решение уравнения вида $\sqrt{x} = b$, основанное на определении арифметического корня, заключается в исключении определяемого термина. А решение уравнения вида $x^2 = a$, основанное на определении арифметического корня, заключается во введении определяемого термина.

За последние полтора века логика ушла далеко вперёд, появилась математическая логика и в её рамках – теория определений. Однако данная теория не нашла отражения в школьной методике преподавания математики. Обращая внимание на эту теорию (логико-математическую теорию определений), необходимо строить на её основе методику работы с определениями в школе.

Во **второй главе «Методика обучения применению определений в курсе математики средней школы»** изложены методические аспекты обучения применению определений при решении задач школьной математики.

В первом параграфе на конкретных примерах рассмотрены особенности использования математической теории определений в математике средней школы. При обсуждении методики работы с определениями, продемонстрировано, что требования, предъявляемые к трем видам определений формальной логики, не только включают в себя требования, предъявляемые к определениям классической теории, но и проясняют то, какой должна быть работа с определениями в школьной математике.

Во втором параграфе проведен анализ недочетов в формулировке определений и анализ ошибок в воспроизведении их учениками. Показано, что использование именно математической логики в работе с определениями позволяет не только обратить внимание на указанные ошибки, но и предупредить их появление.

В третьем параграфе продемонстрировано, как необходимо строить методику, направленную на формирование умения применять определения. Абстрактность математики, отсутствие опоры на материальные объекты – то, что и оказывает основное влияние на формирование абстрактного мышления у учащихся – основывается на применении определений, теорем, использовании умения осуществлять в них правильные подстановки, решая различные задачи. Методическая работа с определениями традиционно заключается в усвоении определений понятий и направлена в основном лишь на их заучивание с целью использования другого имени для обозначения определенной группы объектов. Согласно классической логике, в школьной математике применяются понятия. То есть осуществляется фиксирование выводов из следствия принадлежности объекта определяемому понятию. Ученики используют не определения, как объекты математического языка, а некоторый набор свойств понятия, что приводит к ошибкам. Как следствие этого, вместо применения определений ранга большего 1, особенно определений операций и констант, применяются специально созданные правила. Так, например, при решении уравнений вида $a-x=b$, используется правило нахождения неизвестного вычитаемого (или перенос x в правую часть равенства). В работе проанализировано достаточное количество примеров из научно-методической литературы, где некоторые задания курса математики средней школы решаются с помощью определенных алгоритмов, не содержащих применения определений. В каждом из этих случаев указано более рациональное решение, опирающееся на применение определений школьной математики.

Выделим умения и навыки, которые необходимо сформировать в процессе обучения применению определений:

1) умение (правильно) воспроизводить определение;

2) умение видеть возможность применения определения:

2а) умение опознавать определяемое;

2б) умение опознавать определяющее;

3) умение осуществлять увиденную возможность применения определения:

3а) умение заменять определяемое определяющим (исключение термина);

3б) умение заменять определяющее определяемым (введение термина).

Уровня навыка необходимо достигать при замене определяемого определяющим и наоборот.

Подчеркнем, что умение опознавать определяемое (определяющее) вырабатывается в процессе получения рассматриваемых предложений подстановкой в определяемое (определяющее) и формируется в процессе выполнения многократных подстановок. При обучении сначала нужно на большом количестве упражнений научить учащихся совершать подстановки, а потом, уже наоборот, решая задачи на установление того, как была совершена подстановка, учить видеть возможность подстановки.

Следовательно, в обучении применению определений выделяются этапы:

первый этап – обучение выполнению подстановок в определение;

второй этап – обучение получению данного предложения подстановкой в определение;

третий этап – обучение видению возможности подстановки (куда нужно это выражение подставить, чтобы получить данное).

В процессе исследования разработан общий вид формулировок заданий, соответствующих данным этапам:

1а. Выполни данную подстановку в данное определение. (Подстановки предлагает учитель.)

1б. Придумай и выполни подстановку в данное определение. (Эти подстановки ученик придумывает сам.)

2. Получи данное предложение подстановкой некоторого выражения в данное определение. (Такие предложения ученик берет из любой учебной литературы.)

3. Получи данное предложение подстановкой некоторого выражения в некоторое определение. (Задачи подбирает учитель.)

На третьем этапе, самом сложном из указанных, ученик должен научиться решать различные задачи, получаемые в результате некоторых подстановок в математические предложения. Здесь от ученика требуется: увидеть, какие определения и теоремы «спрятаны» в данном задании; исходя из полученной информации, построить цепочки решений конкретного задания.

Соответственно объектам подстановок выделяются следующие этапы работы с подстановками:

– подстановки в выражения;
– подстановки в предложения;
– подстановки в простые предложения (не содержащие логических союзов);
– подстановки в составные предложения без кванторов;
– подстановки в составные предложения с кванторами;

Из всего вышесказанного следует, что при такой организации обучения применению определений формируются умение правильно воспроизводить определение, умение видеть возможность применения определения, в частности, умение опознавать определяемое и определяющее.

Согласно предлагаемому подходу, методическую работу учителя с определениями можно условно разделить на две части:

I. Подготовительная работа, осуществляемая учителем при разработке урока. Здесь учитель должен соотнести изучаемое определение с определенным типом, согласно классификации в математической логике, отличая математические определения от определений языковых конструкций. Его задача увидеть возможность появления ошибок в соответствии с типом определения и спланировать работу над определением, соответственно его типу, уделяя внимание поэтапной работе с подстановками; введению и исключению термина.

II. Работа на уроке (уроках) непосредственно при участии учеников. Здесь можно выделить следующие основные этапы работы по усвоению определения и обучению его применения:

– пропедевтика введения определения;
– введение определения;
– осмысление определения учениками (использование примеров, подтверждающих важность ключевых словосочетаний в формулировке определения и разъясняющих смысл терминов, входящих в определение);
– уяснение границ применимости определения (как практическое (контрольное) закрепление предыдущего пункта);
– отработка умения воспроизводить определение;
– совместная отработка умений осуществлять подстановки в определение и навыка его применения (объекты подстановок в данном случае должны использоваться от простого к сложному);
– отработка умения получать заданное выражение или предложение (так же постепенно от простого к сложному) подстановкой в определение.

Система упражнений должна включать два аспекта: введение термина и исключение термина.

В работе уделено внимание необходимой пропедевтике обучения применению определений. Помимо этого приводится ряд вспомогательных мер, способствующих более эффективному формированию умения применять определения: игры, творческие задания и т.д.

В четвертом параграфе приведена программа спецкурса «Теория и методика самообучения применению определений в курсе математики средней школы» (свидетельство о государственной регистрации в «Национальном информационном фонде неопубликованных документов» разработки, предъявленной в отраслевой фонд алгоритмов и программ: свидетельство №6316 от 08.06.06, № 50200600889 государственной регистрации). Рассмотрена его реализация на примере изучения определения арифметического квадратного корня.

Пятый параграф посвящен описанию организации, содержания и основных результатов педагогического эксперимента, проводимого с целью подтверждения гипотезы в соответствии с поставленными задачами исследования. Педагогический эксперимент проводился в период с 2002 по 2006 гг. и состоял из трёх этапов: 1-й этап — констатирующий (2001–2002); 2-й этап — поисковый (2002–2004); 3-й этап — обучающий и контролирующий (2004–2006). Эксперимент проводился в естественных условиях учебного процесса на базе МОУ «гимназия №20» г. Люберцы, ГОУ «гимназия № 1566» ЮВОУО ДО г. Москвы и в рамках спецкурса по математике ГОУ «гимназии № 1566» ЮВОУО ДО г. Москвы.

Педагогическим объектом, изменение состояния которого исследовалось в ходе эксперимента, были выбраны группы учащихся 8 и 11 классов, обучаемых по предлагаемой в диссертации методике, в качестве критерия – уровень знаний.

В основу исследования были положены два аспекта: знание математических определений и их применение при решении задач.

С целью проверки указанных аспектов учащимся были предложены проверочные работы, состоявшие из двух серий. Первая серия содержала задания, выполнение которых было связано с усвоением определения. Вторая серия включала задания, выполнение которых позволяло сделать вывод об умении применять определение, совершая элементарные подстановки.

В эксперименте были взяты две выборки, значениями которых явились количество правильно решенных задач учащимися экспериментальной и контрольной групп. Для каждого учащего экспериментального класса было определено количество учащихся контрольного класса, которые решили правильно строго больше задач. Использование числа решенных учеником задач в качестве характеристики позволило применить шкалу отношений. Для работы с результатами парных сравнений элементов двух выборок использовался критерий Вилкоксона-Манна-Уитни.

8 класс (начало эксперимента). Эмпирическое значение критерия Вилкоксона $W = 1{,}33 \le 1{,}96$ свидетельствует о следующем: гипотеза о том, что сравниваемые выборки совпадают, принимается на уровне значимости 0,05.

8 класс (конец эксперимента). Эмпирическое значение критерия Вилкоксона $W = 3{,}04 \ge 1{,}96$ свидетельствует о следующем: гипотеза о том, что сравниваемые выборки различаются, принимается на уровне

значимости 0,05. Следовательно, достоверность различий сравниваемых выборок составляет 95%.

Эмпирическое значение критерия Манна-Уитни $U = 185$ (начало эксперимента), $U = 112$ (конец эксперимента) свидетельствует о том, что использование предлагаемой методики обучения применения определений приводит к статистически значимым отличиям результатов в пользу экспериментальной группы.

Аналогично строилась работа в 11 классах. 11 класс (начало эксперимента). Эмпирическое значение критерия Вилкоксона $W = 1{,}58 \le 1{,}96$ свидетельствует о следующем: гипотеза о том, что сравниваемые выборки совпадают, принимается на уровне значимости 0,05.

11 класс (конец эксперимента). Эмпирическое значение критерия Вилкоксона $W = 2{,}07 \ge 1{,}96$ свидетельствует о следующем: гипотеза о том, что сравниваемые выборки различаются, принимается на уровне значимости 0,05. Следовательно, достоверность различий сравниваемых выборок составляет 95%.

Эмпирическое значение критерия Манна-Уитни $U = 141$ (начало эксперимента), $U = 123$ (конец эксперимента) свидетельствует о том, что использование предлагаемой методики обучения применения определений приводит к статистически значимым отличиям результатов в пользу экспериментальной группы.

Таким образом, результаты эксперимента подтверждают выдвигаемую в исследовании гипотезу на уровне доверия 95%. Итак, использование предлагаемой методики обучения применению определений возможно в средней школе и позволяет повысить качество знаний учащихся.

В процессе теоретического и экспериментального исследования в соответствии с его целью и задачами, получены следующие основные **выводы и результаты:**

1. На основании проведенного анализа научной литературы и практики обучения математике в школе обоснована необходимость обучения применению определений в курсе математики средней школы. Отмеченные типичные ошибки учащихся, связанные главным образом с отсутствием сознательного понимания смысла определений, позволяют утверждать, что традиционная методика обучения математике недостаточно ориентирует учителей на организацию деятельности по работе с определениями, на их успешное применение при решении математических задач;
2. Выявлен ряд ошибок в формулировке определений, решении задач, не находящих объяснения в классической логике. В результате продемонстрировано преимущество использования математической

логики перед традиционной теорией формирования понятий при обучении применению определений;

3. Сформулированы принципы, которыми целесообразно руководствоваться в обучении применению определений:

– работу с определениями надо строить согласно тому, к каким семантическим категориям относятся определяемые в них термины, с соблюдением соответствующих требований;

– необходимо целенаправленное обучение совершению подстановок в определение;

– применение определения осуществляется в двух направлениях: введение определяемого термина и исключение определяемого термина;

4. Определены три этапа формирования умения применять определения (обучение выполнению *указанных* подстановок в *указанное* определение, обучение получению данных предложений *неизвестными* ученику заранее подстановками в *указанное* определение, формирование умения видеть возможность получения данных предложений посредством *неизвестных* заранее подстановок в *неизвестные* заранее определения), выявлены этапы работы с подстановками, в том числе подстановки в выражения, подстановки в предложения. Разработан общий вид формулировок заданий, соответствующих всем перечисленным этапам;

5. Разработана методика обучения применению определений в курсе математики средней школы, основанная на достижениях математической логики с опорой на самостоятельную работу учащихся. В том числе описаны соответствующие диагностика и мониторинг, ряд пропедевтических приемов, способствующих более эффективному формированию умения применять определения. Создан и реализован специальный курс «Теория и методика самообучения применению определений в курсе математики средней школы».

Основное содержание диссертационного исследования отражено в следующих **публикациях**:

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ.

1. Татаринова, Л.Н. Как научить школьников «видеть»/Л.Н.Татаринова// Математика в школе. – 2007. – №7. – С. 37 –40.

2. Татаринова, Л.Н. Теория и методика обучения применению определений в курсе математики средней школы. /Л.Н. Татаринова // Наука и школа. – 2007. – № 6. – С.64–66.

Научные публикации в других изданиях.

3. Татаринова, Л.Н. Роль задач в современной школьной математике /Л.Н. Татаринова // Модернизация школьного математического образования и проблемы подготовки учителя математики. тр. XXI Всерос.

Семинара преподавателей математики ун-тов и пед. вузов. – СПб. : Изд-во РГПУ, 2002. – С.134 –135.

4. Татаринова, Л.Н. Проблемы преподавания современной математики в школе/Л.Н. Татаринова // Сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. В.П. Савинкина. – Коломна, 2002. – С. 32 –36.

5. Татаринова, Л.Н. Работа с использованием диагностик и мониторингов/Л.Н. Татаринова /Материалы семинара «История и перспективы развития образования в Московской области». – Коломна, 2002. – С.108 –109.

6. Татаринова, Л.Н. К вопросу о проблеме различения математического языка и языка изложения математики в школьной методике/Л.Н. Татаринова // Сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. В.П. Савинкина. – Коломна, 2003. – С.54 –57.

7. Татаринова, Л.Н. Развитие мышления учащихся на уроках математики/Л.Н. Татаринова // Сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. В.П. Савинкина. – Коломна, 2004. – С.122 –126.

8. Татаринова, Л.Н. К вопросу о методике обучения применению определений в школьной математике/Л.Н. Татаринова // Сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. В.П. Савинкина. – Коломна, 2005. – С.112–115.

9. Татаринова, Л.Н. Использование теории подстановок при обучении применению определений в решении задач/Л.Н. Татаринова // Современные проблемы преподавания математики и информатики: сб. науч. ст. по итогам III Междунар. научно-метод. конф. – Волгоград, 2006. – С.67 –73.

Отпечатано в ООО «Компания Спутник+»
ПД № 1-00007 от 25.09.2000 г.
Подписано в печать 22.09.2010
Тираж 100 экз. Усл. п.л. 1,25
Печать авторефератов (495)730-47-74, 778-45-60