На правах рукописи

Русалеев Михаил Андреевич

ОБОБЩЕННО СТАБИЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск-2010

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор,
Палютин Евгений Андреевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Пинус Александр Георгиевич

кандидат физико-математических наук, доцент
Викентьев Александр Александрович

Ведущая организация:

Дальневосточный государственный университет

Защита диссертации состоится 18 июня 2010 г. в 14 час. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан 17 мая 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Теория моделей как раздел математики находится на стыке математической логики и алгебры и сформировалась как самостоятельная область в 1950-х годах. Одним из объектов изучения этого раздела математики является классификация элементарных теорий. Одним из способов получения этой классификации является классификация по количеству типов в этих теориях (то есть совместных с теорией множеств формул со свободными переменными и с фиксированным множеством параметров, являющихся элементами модели данной теории). Исследования в этом направлении начались с работ Р. Вота [1], К. Рыль-Нардзевского [2] и М. Морли [3]. Р. Вот доказал, что любой неглавный тип можно опустить в некоторой модели. К. Рыль-Нардзевский доказал, что если число n-типов над пустым множеством конечно для любого n, то теория счетно категорична. М. Морли глубоко исследовал тотально трансцендентные теории, то есть теории, в которых имеется лишь счетное число типов над любым счетным множеством параметров. Как результат этих исследований М. Морли доказал гипотезу Лося о несчетной категоричности полных теорий. В дальнейшем понятие тотально трансцендентной теории было обобщено С.Шелахом до понятия стабильной теории [4] — теории в которой для некоторой бесконечной мощности $\varkappa$ мощность множества полных 1-типов над множеством параметров мощности $\varkappa$ не превосходит этой мощности $\varkappa$. Одним из ключевых свойств стабильных теорий является свойство определимости типов, состоящее в том, что для любых моделей $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ и любой формулы φ с параметрами из $\mathfrak{N}$ существует формула ψ с параметрами из $\mathfrak{M}$, такая что $\varphi(N) \cap M = \psi(M)$. Другим важным свойством стабильных теорий является существование неответвляющихся расширений типов над множеством, которое позволяет определить полезное для развития теории понятие независимости множеств.

Далее эта область исследований, которую называют теорией стабильности, развивалось в нескольких направлениях. Одно из направлений — изучение подклассов стабильных теорий, обладающих теми или иными интересными свойствами. С точки зрения спектра стабильности (класса мощностей, в которых теория стабильна) среди стабильных теорий можно выделить подкласс суперстабильных теорий (теории, стабильные во всех мощностях, начиная с $2^{|T|}$), в котором являются подклассом ω-стабильные, часть из которых являются несчетно категоричными. Так же интересными подклассами стабильных теорий являются сильно минимальные [5] и однобазируемые теории [6], [7].

С другой стороны развиваются направления, целью которых является обобщить понятие стабильности, сохраняя при этом те или иные полезные свойства и методы исследования. В развитие методов, основанных на исследовании свойств отношения ответвляемости типов изучаются простые теории [8], розовые теории [9].

Теория стабильности бурно развивалась во второй половине 20 века и продолжает развиваться. Вопросам стабильности посвящены множество публикаций и монографий [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21] (список далеко не полный).

Стабильные теории не содержат формульно определимого порядка. Однако теории упорядоченных структур так же могут обладать *хорошими свойствами*. Развитию этой идеи посвящены исследования o-минимальных и слабо o-минимальных теорий [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30].

Следует отдельно отметить исследования теорий пар моделей [31], [32], [33], [34] — теорий, в которых одноместный предикат выделяет подмодель. Основным вопросом здесь является, какие условия нужно наложить на предикат для того, чтобы хорошие свойства теории без предиката сохранялись и для теории пары моделей. Одним из результатов этих исследований является определимость типов над любыми P-множествами для типов над P-моделями которая была установлена Т.Нурмагамбетовым и Б.Пуаза [35].

Интересное обобщение понятия стабильности было предложено Мустафиным [36], которое было в последствии уточнено до понятия E^*-стабильности Палютиным [37]. Палютин так же доказал для этого уточнения теорему об определимости типов, обобщающую как определимость типов для стабильных теорий, полученную Шелахом [38], так и результат Т.Нурмагамбетовым и Б.Пуаза для теории пар. Понятие E^*-стабильности представляет собой новую шкалу стабильности, основным параметром которой является некоторое отображение типов полной теории в типы другой теории. Палютиным было так же показано, что классы o-минимальных, слабо "оминимальных, сильно минимальных и простых теорий являются стабильно определимыми [39], то есть могут быть определены как классы E^*-стабильных теорий для подходящего отображения E^*.

В развитие этой теории автором диссертации изучаются несколько частных случаев E^*-стабильности (обобщенной стабильности), их свойства и отношения.

Основное содержание диссертации.

1) вводится серия понятий: $(P,0)$,$(P,1)$,(P,a) и (P,e)-стабильность — являющиеся частными случаями обобщенной стабильности полных теорий, исследуется их взаимосвязь и связь со стабильностью полных теорий;

2) приводится характеризация $(P,1)$-стабильных теорий как класса теорий определимо интерпретируемых в какой либо теории языка, состоящего только из одноместных предикатов;

3) доказывается (P,a)-стабильность теории любой абелевой группы без кручения;

Новизна и научная значимость работы.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Результаты работы могут быть полезны для написания монографий и чтения спецкурсов на математических факультетах университетов.

Методы исследования. Наряду с классическими методами теории моделей в работе активно используются теорема об определимости типов для обобщенно стабильных теорий из [37]. В последней главе так же применяются методы линейной алгебры.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технические прогресс"в 2006 году, Российской школе-семинаре "Синтаксис и семантика логических систем"в Иркутске в 2006 году и во Владивостоке в 2008 году, Международной конференции "Мальцевские чтения"в 2006 и 2009 годах, школе-конференции "Пограничные проблемы теории моделей и универсальной алгебры"в Эрлоголе в 2007 году, Международной конференции "Алгебра и её приложения"в Красноярске в 2007 году.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работе [41] из журналов, входящей в перечень ВАК ведущих рецензируемых научных журналов и изданий и в работах [43–45].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, и 3 глав и списка литературы. Она изложена на 56 страницах, библиография содержит 45 наименования.

Перейдем к более подробному изложению работы.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав.

Введение Введение содержит исторический обзор и формулировки основных результатов.

Глава 1 содержит основные определения и предварительные факты, касающиеся обобщенно стабильных теорий.

Обобщенная стабильность представляет собой шкалу понятий, в которой параметром выступает отображение E^*, называемое представлением типов, которое каждому полному типу теории T над бесконечным множеством переменных X сопоставляет некоторый тип языка L^*. В этой работе рассматриваются несколько наиболее естественных примеров обобщенной стабильности.

В первую очередь, стоит отметить, что стабильность является одним из примеров обобщенной стабильности. В случае стабильности, язык L^* получается добавлением к языку L символа константы, а в качестве представления типов теории T языка L в языке L^* берется отображение, сопоставляющее каждому типу t его замыкание относительно выводимости в языке L^*.

Легко показать, что если ввести вместо дополнительной константы дополнительный предикат и наложить на него условие конечности числа реализаций, то полученное понятие так же совпадает со стабильностью. Кроме того вводятся другие примеры обобщенной стабильности, строящиеся путем добавления к языку одноместного предиката: $(P,0)$,$(P,1)$,(P,a) и (P,e)-стабильность.

Понятие $(P, 0)$-стабильности по сути является вырожденным, поскольку любая полная теория, имеющая бесконечную модель, является не $(P, 0)$-стабильной. Для этого понятия в качестве представления типов берется отображение, сопоставляющее полному типу t теории T его замыкание относительно выводимости в языке с дополнительным одноместным предикатом. Хотя сама по себе $(P, 0)$-стабильность не представляет интереса, она демонстрирует необходимость накладывать на предикат дополнительные условия для получения невырожденного примера обобщенной стабильности.

Понятие $(P, 1)$-стабильности интересно тем, что среди различных примеров обобщенной стабильности оно является, в некотором смысле, наименьшим невырожденным понятием. В качестве представления типов берется отображение, добавляющее к полному типу t теории T над множеством переменных X условие, что предикат P истинен на всех элементах, реализующих переменные из множества X. Изучению этого понятия посвящена глава 2. В главе 1 мы только показываем, что из $(P, 1)$-стабильности следуют как стабильность, так и (P, a)-стабильность, а так же приводим пример, демонстрирующий что обратное не верно.

Для введения понятия (P, a)-стабильности в качестве представления типов берется отображение, добавляющее к полному типу t теории T условие, что предикат P истинен на элементах, реализующих переменные из типа t, и множество предложений, означающих, что предикат P алгебраически замкнут относительно языка L. Существуют примеры стабильных, но не (P, a)-стабильных теорий. Вопрос о существовании (P, a)-стабильных, но не стабильных теорий открыт.

Понятие (P, e)-стабильности представляет отдельный интерес, поскольку связано с изучением элементарных пар моделей. В качестве представления типов берется отображение, добавляющее к полному типу t теории T условие, что предикат P истинен на элементах, реализующих переменные из типа t, и множество предложений, означающих, что P является элементарной подмоделью относительно языка L. В работе показывается, что из (P, a)-стабильности следует (P, e)-стабильность.

Глава 2 посвящена детальному изучению $(P, 1)$-стабильных теорий. Как было показано в главе 1, понятие $(P, 1)$-стабильности не вырождено, то есть существуют примеры теорий, имеющих бесконечные модели, и являющиеся $(P, 1)$-стабильными. Тем не менее, все известные примеры оказались довольно просто устроены. Поэтому возникла гипотеза, что класс $(P,1)$-стабильных теорий можно описать как все теории, интерпретируемые в теориях языка, состоящего только из одноместных предикатов.

Теорема. *Для полной теории T языка L следующие условия эквивалентны:*

(1) T является $(P,1)$-стабильной;

(2) T определимо интерпретируется в некоторой теории T_1 языка L_1, состоящего только из одноместных предикатов;

(3) для любой формулы $\varphi(z,\mathbf{x})$, $l(x) = n$, теории T существует такое конечное k, что для любых различных $k+1$ кортежа длины n среди них найдутся два различных кортежа $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$, что $\forall z((z \notin \mathbf{a}^1 \wedge z \notin \mathbf{a}^2) \to (\varphi(z,\mathbf{a}^1) \leftrightarrow \varphi(z,\mathbf{a}^2)))$.

Как видно из формулировки теоремы, даются сразу две характеризации $(P,1)$-стабильности. Характеризация через через интерпретируемость в теории языка, состоящего из одноместных предикотов удобнее использовать чтобы показать, что теория $(P,1)$-стабильна. Вторую же характеризацию удобнее использовать для противоположных целей — чтобы показать не $(P,1)$-стабильность теории.

Вторая характеризация сыграла важную роль в доказательстве теоремы. Достаточность условия (2) для $(P,1)$-стабильности показывается сравнительно легко. А вот необходимость доказывалась в два этапа. Сначала была показана необходимость условия (3) для $(P,1)$-стабильности. Для этого было построено неразличимое множество с особыми свойствами с использованием теоремы Рамсея; далее было показано, что истинность предиката P на элементах модели можно задать таким образом, что построенное неразличимое множество будет разделено на две бесконечные части некоторой формулой, содержащей предикат P, из чего следует не $(P,1)$-стабильность теории T. Далее же для всякой теории, удовлетворяющей условию (3) была построена интерпретация в теории языка, состоящего только из одноместных предикатов.

Поскольку дано полное описание класса $(P,1)$-стабильных теорий, понятие $(P,1)$-стабильности можно считать изученным и перейти к другим, более сложно устроенным примерам обобщенной стабильности.

Глава 3 посвящена изучению (P,a)-стабильных теорий. Понятие (P,a)-стабильности интересно, поскольку в большинстве теорий, в отличие от $(P,1)$-стабильности, оно накладывает существенные ограничения на реализации добавленного предиката. Тем не менее, часть результатов, касающихся $(P,1)$-стабильности, переносится и на случай (P,a)-стабильных теорий, чему посвящен первый параграф, в котором строится необходимое условие (P,a)-стабильности, аналогичное условию для $(P,1)$-стабильных теорий из предыдущей главы.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{X} = \{\mathrm{x}^\alpha | \alpha \in I\}$, $\mathrm{x}^\alpha = \langle x_0^\alpha, \dots, x_{k-1}^\alpha \rangle$, $X = \{x_i^\alpha | \alpha \in I, i < k\}$ *— соответственно множество кортежей переменных и множество переменных. Причем, X состоит из тех же переменных, что кортежи из $\mathbf{X}$.*
Пусть существует формула $\varphi(z,\mathrm{x})$ такая, что совместно следующее множество формул:
$R_0(\mathbf{X}) = T \cup \{\mathbf{X}$ *является неразличимой последовательностью*$\} \cup$
$\{\exists z(\neg((\varphi(z,\mathrm{x}^\alpha) \leftrightarrow \varphi(z,\mathrm{x}^\beta)) \wedge \forall z_1 \dots \forall z_m(\bigwedge\limits_{i=1}^{m} \neg(\varphi(z_i,\mathrm{x}^{\gamma_i} \leftrightarrow \varphi(z,\mathrm{x}^{\gamma_i}))) \rightarrow$
$((\exists^{\leqslant n} z_0 \theta(z_0, z_1, \dots, z_m, \mathrm{y})) \rightarrow \neg\theta(z, z_1, dots, z_m, \mathrm{y})))) \mid \alpha, \beta, \gamma_i, n, m \in \omega,\ i \in \{1, \dots, m\},\ \mathrm{x}^\alpha, \mathrm{x}^\beta, \mathrm{x}^{\gamma_i} \in \mathbf{X},\ \mathrm{y}$ *— кортеж переменных из X, θ — формула теории T*$\}$.
Тогда T не (P,a)-стабильна.

Понятие (P,a)-стабильности значительно богаче, чем понятие $(P,1)$-стабильности. Однако в первой главе был приведен лишь один пример (P,a)-стабильной, но не $(P,1)$-стабильной теории. Второй параграф посвящен изучению (P,a)-стабильных групп. В частности, доказывается (P,a)-стабильность абелевых групп без кручения.

Теорема. *Если T — полная теория абелевой группы.без кручения, то T является (P,a)-стабильной.*

Поскольку большинство абелевых групп не интерпретируются ни в какой теории языка, состоящего только из одноместных предикатов, эта теорема фактически приводит сказу класс примеров (P,a)-стабильных но не $(P,1)$-стабильных теорий.

Так же во втором параграфе приводятся другие примеры (P,a)-стабильных и не (P,a)-стабильных абелевых групп.

Китайский философ Лао Дзы говорил: "Истина без любви делает человека придирчивым. Воспитание без любви порождает противоречия. Порядок без любви делает человека мелочным."Автор благодарен научному руководителю Палютину Евгению Андреевичу за то, что он своим положительным примером привил автору любовь к науке.

Литература

[1] *R. L. Vaught,* Models of complete theories, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963) 299-313.

[2] *C. Ryll-Nardzewski,* On the Categoricity in Power $\leqslant \aleph_0$, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys., 7 (1959), 545-548.

[3] *M.D.Morley,* Categoricity in power, Trans. A.M.S., 114 (1965) 514-538.

[4] *S.Shelah,* Stable theories, Israel J. Math. 7 (1969) 187-202.

[5] *J. Baldwin, A. Lachlan,* "On Strongly Minimal Sets", The Journal of Symbolic Logic, 1971, 36 (1), p. 79–96.

[6] *E. Hrushovski, B Zilber,* "Zariski geometries", Bull. Am. Math. Soc. 28(1993), 315-323.

[7] *E. Hrushovski, B Zilber,* "Zariski geometries", J. Am.Math. Soc. 9 (1996), 1-56.

[8] *S. Shelah,* Simple unstable theories, Annals of Mathematical Logic, 19:177–203, 1980.

[9] *C. Ealy, A. Onshuus,* "Characterizing rosy theories", Journal of Symbolic Logic, 2007, 72, p. 919–940.

[10] *J. Baldwin, M. Benedikt,* "Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models", Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), p. 4937-4969.

[11] *E. Casanova, M. Ziegler,* "Stable theories with a new predicate", The Journal of Symbolic Logic, 66(2001), p. 1127-1140.

[12] *A. Lachlan,* "Dimension and totally transcendental theories of rank 2", Set Theory and Hierarchy Theory, Springer-Verlag, 1976, p. 153-183.

[13] *J.T. Baldwin,* "Fundamentals of Stability Theory", Springer-Verlag, New Jork Inc, 1988.

[14] *D. Lascar, B. Poizat,* "An introduction to forking", The Journal of Symbolic Logic, 44 (1979), p. 330-350.

[15] *S. Shelah,* "Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories", The Journal of Symbolic Logic, 37(1972), p. 107-113.

[16] *A. Pillay,* "An introduction to stability theory", Clarendon Press, Oxford, 1983.

[17] *J.T. Baldwin, Shi. Niandong,* "Stable Generic Structures", *Annals* of Pure and Applied Logic, 79, 1996, p. 1-35.

[18] *D. Lascar,* "Stability in Model Theory", Longman, 1987.

[19] *Б.И. Зильбер,* "Сильно минимальные счетно категоричные теории", Сибирский математический журнал, 21, 1980, с. 219-230.

[20] *Б.И. Зильбер,* "Сильно минимальные счетно категоричные тео- рии II-III", Сибирский математический журнал, 25, 1984, с. 396-412, 559-571.

[21] *E. Hrushovski,* "A new strongly minimal set", Annals of Pure and Applied Logic, 62, 1993, p. 147-166.

[22] *D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn,* "Weakly o-minimal structures and real closed fields", Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), p. 5435-5483.

[23] *D. Marker,* "Omitting types in o-minimal theories", The Journal of Symbolic Logic, 51(1986), p. 63-74.

[24] *A. Pillay,* "Definability of types, and pairs of o-minimal structures", The Journal of Symbolic Logic, 59(1994), p. 1400-1409.

[25] *E. Baisalov, B. Poizat,* "Paires de structures o-minimales"The Journal of Symbolic Logic, 63(1998), p. 570-578.

[26] *O.V. Belegradek, A.P. Stolboushkin, M.A. Taitslin,* "Generic queries over quasi-o-minimal domains", Lecture Notes in Computer Science 1234, Springer-Verlag, 1997, p. 21-32.

[27] *V.V. Verbovskiy,* "On formula depth of weakly o-minimal structures", Proceedings of 2-nd Summer International School, Border questions of model theory and universal algebra, Новосибирск, 1997, с. 209-224.

[28] *Б.Ш. Кулпешов,* "Слабая о-минимальность линейно упорядоченной структуры", Исследования в теории алгебраических систем, Карагандинский Государственный Университет, Караганда, 1995, с. 61-67.

[29] *A. Pillay,* "Some remarks on definable equivalence relation in o-minimal structures", The Journal of Symbolic Logic, 51 (1986), p. 709-714.

[30] *Б.С. Байжанов,* "Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates", The Journal of Symbolic Logic, 66, 3, 2001, p. 1382-1414

[31] *B. Poizat,* "Pairs de structure stables", The Journal of Symbolic Logic, 48(1983), p. 239-249.

[32] *E. Bouscaren,* "Dimensional order property and pairs of models", Annals of Pure and Applied Logic, 41 (1989), p. 205-231.

[33] *A.T. Nurtazin,* "About elementary pairs in the categorical theories", Proceedings of French-Soviet colloquim for Theory of Models, Karaganda, 1990, p. 126-146.

[34] *I. Ben-Yaacov, A. Pillay, E. Vassiliev,* "Lovely pairs of models", preprint, 2002.

[35] *Т. Нурмагамбетов, Б.Пуаза,* О числе элементарных пар над множествами, Труды Французско-казахстанского коллоквиума по теории моделей, Алматы, 1995, с. 73-82.

[36] *Т.Г. Мустафин,* "Новые понятия стабильности теорий", Трутды советско-французского коллоквиума по теории моделей, Караганда, 1990, с. 112—125.

[37] *Е. А. Палютин*, "E^*-стабильные теории", Алгебра и логика, т.42, N 2(2003), с. 194-210.

[38] *S.Shelah*, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amsterdam: North-Holland, 1978.

[39] *Е. А. Палютин*, "Стабильно определимые классы теорий", Алгебра и логика, т.44, N 5(2005), с. 583–600.

[40] *Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин*, Математическая логика, 4-е изд., СПб., Лань, 2005.

Работы автора по теме диссертации

[41] *М. А. Русалеев*, "Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий", Алгебра и логика, т.46, N 3(2007), с. 346-359.

[42] *М. А. Русалеев*, "Обобщенная стабильность абелевых групп без кручения", Алгебра и логика, принято в печать.

[43] *М. А. Русалеев*, "Обобщенная стабильность абелевых групп без кручения", ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, Препринт №238, декабрь 2009

[44] *М. А. Русалеев*, "Свойства обобщенно стабильных теорий", Algebra and Model Theory 6. Collection of papers, Novosibirsk State Technical University, 2007, с. 91-95

[45] *М. А. Русалеев*, "(P,a)-стабильные и (P,a)-нестабильные группы", Algebra and Model Theory 7. Collection of papers, Novosibirsk State Technical University, 2009

Русалеев Михаил Андреевич

Обобщенно стабильные теории

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 04.05.2010г.	Формат 60x84 1\16
Усл. печ. л. 1 Заказ № 78	Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ООО « Омега Принт»
630090, г. Новосибирск, пр. Ак.Лаврентьева,6, оф.3-021
тел/факс (383) 335-65-23 email: omegap@yandex.ru