На правах рукописи

КАМЫШОВ Алексей Владимирович

КВАНТОРЫ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ (5–11 КЛАССЫ)

Специальность 13.00.02 — теория и методика обучения и воспитания (математика)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата педагогических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии ГОУ ВПО МО «Коломенский государственный педагогический институт»

Научный руководитель:

доктор педагогических наук, профессор
Назиев Асланбек Хамидович

Официальные оппоненты:

доктор педагогических наук, доцент
Тимофеева Ирина Леонидовна

кандидат педагогических наук, профессор
Никольская Инна Львовна

Ведущая организация: Калужский государственный педагогический университет имени К.Э. Циолковского

Защита состоится «23» марта 2007 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 212.154.18 при Московском педагогическом государственном университете по адресу: 107140, Москва, ул. Краснопрудная, д. 14, математический факультет МПГУ, ауд. 301.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МПГУ по адресу: 119992, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1.

Автореферат разослан «20» февраля 2007 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета Е.И. Санина

Общая характеристика работы

Россия переживает эпоху перемен. Наше общество меняется, поэтому меняются и требования, предъявляемые к различным звеньям общества, в том числе — и к образованию.

Новые социальные требования к системе российского образования сформулированы в Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года.

> Развивающемуся обществу нужны современно образованные, нравственные, предприимчивые люди, которые могут самостоятельно принимать ответственные решения в ситуации выбора, прогнозируя их возможные последствия, способны к сотрудничеству, отличаются мобильностью, динамизмом, конструктивностью, обладают чувством ответственности за судьбу страны[1].

Этот социальный заказ обращён, безусловно, ко всем звеньям образования, а в первую очередь — к общему среднему образованию.

Важнейшей задачей современной российской школы является формирование интеллектуально развитой личности. Большая ответственность при этом возлагается на учителя математики, поскольку математика, как заметил Дж.В.А. Юнг, даёт наиболее типичные, отчётливые и простые примеры приёмов мысли, представляющих исключительную важность для каждого, причём никакой другой учебный предмет не может сравниться с ней в этом отношении[2].

Объясняется это тем, что уровень интеллектуального развития человека теснейшим образом связан со способностью проводить дедуктивные рассуждения, а математика, если говорить совсем коротко, это доказательство (и, значит, дедуктивные рассуждения). В силу этой особенности математики изучающий её буквально принуждён (по выражению Н.И. Лобачевского — «с почти военною дисциплиною») выстраивать свои умозаключения в строгом соответствии с законами логики.

Логическим проблемам обучения математике в школе уделяли внимание крупные отечественные и зарубежные математики-педагоги: В.И. Арнольд, В.Г. Болтянский, А.В. Гладкий, Б.В. Гнеденко, Г.В. Дорофеев, Ф. Клейн, Л.А. Калужнин, А.Н. Колмогоров, Л.Д. Кудрявцев, В.Л. Матросов, А.И. Маркушевич, Д. Пойа, А.А. Столяр, Г. Фройденталь, А.Я. Хинчин и др.

---

[1]Концепция модернизации российского образования за период до 2010 года. — М.: АПКиПРО, 2002. — С. 4.

[2]Юнг Дж.В.А. Как преподавать математику. — М.: Госиздат, 1911. — С. 12.

Все они сходились на том, что, как подчеркнул А.А. Столяр, «проблема внедрения элементов логики в обучение математике состоит не в том, чтобы изучать специально и обособленно логику, а в том, чтобы необходимые элементы логики стали неотъемлемой частью самого преподавания математики — важным вспомогательным инструментом, повышающим эффективность обучения и влияющим на логическое развитие»[3].

Это естественно ставит нас перед вопросом: «Что считать "необходимыми элементами логики"»? Не так давно большинство методистов полагали (а многие и теперь ещё полагают), что для нужд обучения в школе вполне достаточно так называемой традиционной логики: учения о понятии и субъектно-предикатной форме суждений. На самом же деле, как заметил Г. Фройденталь, «едва ли существуют мысли, которые можно выразить в субъектно-предикатной форме; мысли требуют схемы отношений и *последовательностей кванторов*»[4].

Проблема использования кванторов при обучении математике и их роль в этом обучении исследуется в работах В.Г. Болтянского, Г.В. Дорофеева, А.Х. Назиева, И.Л. Никольской, Б.Д. Пайсона, Л.Г. Петерсон, И.Л. Тимофеевой и др.

Но, несмотря на немалое количество работ, эта проблема ещё далека от полного решения. В частности, ни в одной из известных нам работ нет ответа на вопрос, какой именно набор элементов логики кванторов должен стать неотъемлемой частью процесса обучения математике. Налицо противоречие: необходимые элементы логики кванторов должны стать неотъемлемой частью преподавания математики, но каковы эти элементы и что нужно сделать, чтобы они стали неотъемлемой частью процесса обучения математике, — до сих пор неясно. Указанное противоречие и составляет **проблему исследования.**

Цель исследования состоит в решении указанной проблемы, то есть в том, чтобы составить перечень необходимых элементов логики кванторов и разработать методику включения этих элементов в процесс обучения математике в школе.

Всё вышесказанное определило выбор **темы** и **актуальность** нашего исследования.

Объектом исследования является процесс обучения математике в современной отечественной средней школе.

Предмет исследования: кванторы в обучении математике в школе.

---

[3]Столяр А.А. Педагогика математики. Курс лекций. — Минск: Вышейшая школа, 1969. — С. 20.

[4]Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: Ч. 1. — М.: Просвещение, 1983. — С. 68; курсив наш. — А. К.

Гипотеза, положенная в основу исследования, состоит в том, что если дополнить сложившуюся систему обучения математике в школе необходимыми элементами логики кванторов, то это будет способствовать повышению эффективности обучения математике.

Цель, объект, предмет и гипотеза исследования определили его **задачи:**

1. Определить место и роль кванторов в школьной математике.

2. Составить перечень основных законов логики кванторов, наиболее часто применяемых в школьном курсе математики.

3. Составить перечень элементов логики кванторов, которые должны стать неотъемлемой частью процесса обучения математике.

4. Разработать методику включения этих элементов в процесс обучения математике.

5. Экспериментально проверить сформулированную выше гипотезу исследования.

Теоретико-методологические основы исследования:

— деятельностный подход и теория развивающего обучения (Л.С. Выготский, П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, Л.В. Занков, Н.Ф. Талызина, Д.Б. Эльконин и др.);

— исследования по проблемам школьного математического образования (А.Д. Александров, Д.В. Аносов, В.И. Арнольд, М.И. Башмаков, Н.Я. Виленкин, Г.Д. Глейзер, В.А. Гусев, В.А. Далингер, И.В. Дробышева, Г.В. Дорофеев, А.Н. Колмогоров, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Л. Матросов, А.Г. Мордкович, И.Л. Никольская, В.А. Оганесян, Н.Х. Розов, Г.И. Саранцев, И.М. Смирнова, В.А. Смирнов, А.А. Столяр, Р.С. Черкасов, И.Ф. Шарыгин и др.);

— работы по проблемам логического характера школьного курса математики (Н.М. Бескин, В.Г. Болтянский, А.В. Гладкий, Я.И. Груденов, Г.В. Дорофеев, В.И. Игошин, Л.А. Калужнин, В.Л. Матросов, А.Х. Назиев, И.Л. Никольская, Б.Д. Пайсон, А.Д. Семушин, А.А. Столяр, И.Л. Тимофеева, И.М. Яглом, А.В. Ястребов и др.).

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:**

— изучение и анализ философской, научно-методической, психолого-педагогической и научной литературы по теме исследования;

— изучение и анализ школьных учебников, учебных пособий и программ по математике;

— посещение и анализ уроков в школе;

— изучение и анализ письменных работ учащихся;

— наблюдение, анкетирование школьников, беседы с учащимися и учителями;

— обобщение и систематизация опыта работы учителей математики и собственного опыта преподавания математики в средней школе;
— педагогический эксперимент по проверке эффективности основных теоретических положений исследования и статистическая обработка его результатов.

Научная новизна проведённого исследования состоит в том, что:
— определены место и роль кванторов и основных законов логики кванторов в школьном курсе математики;
— выявлены связанные с кванторами недостатки обучения математике в школе;
— составлен перечень необходимых элементов логики кванторов;
— разработана методика включения этих элементов в процесс обучения математике.

Теоретическая значимость исследования. Результаты исследования позволяют по-новому оценить и могут существенно изменить сложившиеся представления о роли кванторов в школьной математике и обучении ей, открывают дорогу дальнейшим исследованиям по проблемам логического характера школьного курса математики.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработана и внедрена методика включения необходимых элементов логики кванторов в процесс обучения математике.

Достоверность результатов исследования обеспечивается: чёткостью методологических, математических, историко-математических, психолого-педагогических и методических позиций; логической непротиворечивостью проведённых рассуждений и выводов, их согласованностью с концепциями базисных наук и принципиальным соответствием основным результатам других исследователей.

Положения, выносимые на защиту:

1. Кванторы — это не «сокращающие значки», каковыми их представляют во многих популярных изложениях математической логики, а важнейшие компоненты сложившейся к настоящему времени структуры мышления.

2. За небольшими исключениями типа равенств, составляющих таблицу умножения, каждое математическое предложение является, в явном или неявном виде, либо обобщением (начинается с квантора всеобщности), либо подтверждением (начинается с квантора существования). По этой причине правильное понимание предложений математики без явного или неявного осознания присутствия в них кванторов практически невозможно.

3. В силу первого и второго положений рассмотрение кванторно-ориентированной проблематики должно стать неотъемлемой частью процесса обучения математике. В частности, неотъемлемой частью

процесса обучения математике должна стать совместная деятельность учителя и учеников, направленная на формирование умений:

✓усматривать в предложениях явно или неявно присутствующие в них кванторы;

✓правильно понимать предложения с кванторами;

✓правильно формулировать утверждения с помощью кванторов;

✓доказывать предложения с кванторами;

✓применять предложения с кванторами;

✓рассуждать в соответствии с основными законами логики кванторов;

✓распознавать и выявлять нарушения основных законов логики кванторов.

Основные этапы исследования. Диссертация обобщает результаты исследования, проводимого автором в несколько этапов с 2002 по 2006 гг.

1-й этап (2002–2003). Изучение научной и методической литературы по проблеме исследования, посещение уроков учителей математики. Начало педагогической деятельности. Осознание первых проблем.

2-й этап (2003–2005). Преподавание в средней школе, на подготовительном отделении ГОУ ВПО МО «Коломенский государственный педагогический институт», на курсах по подготовке к ЕГЭ по математике в Межшкольном учебном комбинате г. Коломны. Параллельно — работа с преподавателями математики в Ассоциации учителей профильных классов г. Коломны. Составление перечня необходимых элементов логики кванторов и разработка методики включения этих элементов в процесс обучения математике. Внедрение разработанной методики. Выявление её эффективности.

3-й этап (2005–2006). Уточнение, анализ, обобщение и систематизация результатов проведённого исследования. Оформление результатов исследования и анализа экспериментов в диссертационную работу.

Апробация и внедрение результатов исследования. Разработанная нами методика использовалась на уроках, факультативных и элективных курсах по математике в МОУ гимназии № 2 «Квантор» и МОУ СОШ № 12 г. Коломны, на подготовительном отделении ГОУ ВПО МО «Коломенский государственный педагогический институт», на курсах по подготовке к ЕГЭ по математике в Межшкольном учебном комбинате г. Коломны.

Основные результаты исследования неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях кафедры алгебры и геометрии ГОУ ВПО МО «Коломенский государственный педагогический институт», на научно-методическом семинаре по теории и методике обучения математике (Коломна, 2002–2006 г.г.), на Всероссийском семинаре преподавателей математики университетов и педагогических вузов (Челябинск, 2004 г.; Саратов, 2005 г.; Киров, 2006 г.), на Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 2005 г.), на заседании Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2005 г.), на Международной конференции «Современные проблемы преподавания математики и информатики» (Волгоград, 2006 г.), на научно-методической секции математики и методики преподавания математики (Москва, 2006 г.).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и 7 приложений. Общий объём работы 190 стр., из них 154 стр. занимает основной текст, 36 стр. — приложения; список литературы содержит 154 наименования.

Основное содержание исследования

Во введении обоснованы выбор и актуальность темы исследования, определены объект, предмет, цель исследования и гипотеза исследования, указаны задачи, методы и теоретико-методологические основы исследования, раскрыты научная новизна, теоретическая и практическая значимость результатов исследования, сформулированы положения, выносимые на защиту, приведены сведения об апробации и внедрении результатов.

В первой главе «Кванторы в математике и в школьной математике» определяются место и роль кванторов в школьной математике, составляется список основных законов логики кванторов, неявно присутствующих в школьной математике, обсуждается возможность эффективного использования некоторых законов логики кванторов в работе учителя математики, выявляются связанные с кванторами недостатки обучения математике в школе, составляется перечень необходимых элементов логики кванторов.

В разделе 1.1 объясняется, что такое кванторы, в чём состоит основная заслуга Гóтлоба Фрéге (1848–1925) в отношении кванторов, показано, как введение кванторов уточняет язык, сформулированы соглашения об истинностном значении обобщений и подтверждений. В соответствии с этими соглашениями сформулированы правила, подсказывающие, как можно доказать то или иное обобщение или подтверждение. Здесь же объясняется, в чём состоит так называемая геометрическая интерпретация кванторов, рассматриваются основные законы логики кванторов.[5]

[5]Под логикой кванторов мы понимаем раздел математической логики, посвя-

В разделе 1.2 приведены многочисленные примеры, показывающие, что кванторами буквально пронизан весь школьный курс математики, обсуждается вопрос о (разумеется, неявном) использовании основных законов логики кванторов на уроках математики. Здесь же показано, как учитель математики может эффективно использовать законы логики кванторов в своей работе. В частности, показано, как понимание подлинного смысла теорем о решении простейших тригонометрических уравнений и знание закона отрицания подтверждений позволяют учителю осознать то, что в предложениях

$$\sin x = 0,5 \leftrightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

и

$$\sin x \neq 0,5 \leftrightarrow x \neq (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

одна и та же фраза «$k \in \mathbb{Z}$» означает *не* одно и тоже. В первом случае она означает «существует целое число k», а во втором — «для любого целого числа k». Более того, показано, что понимание этого обстоятельства вместе с использованием распределительных законов для кванторов и логических союзов помогают учителю найти ответы и на другие вопросы, возникающие при записи решений совокупностей и систем простейших тригонометрических уравнений.

В разделе 1.3 нами выявлены некоторые существенные связанные с кванторами недостатки обучения математике в школе. Главный из них заключается в том, что в огромном количестве традиционных формулировок математических предложений кванторы либо вообще опускаются, либо подаются в завуалированном виде. А это, в свою очередь, приводит к тому, что учащиеся:

— не усматривают кванторы, неявно присутствующие в предложениях (и их не учат этому);

— испытывают трудности при формулировке, доказательстве и применении предложений с кванторами;

— с трудом справляются с задачами, в которых требуется (неявное) использование одного или нескольких законов логики кванторов.

В разделе 1.4, последнем в этой главе, мы рассматриваем вопрос о том, чему следует учить школьников в отношении кванторов. В результате обсуждения этого вопроса появляется перечень элементов логики кванторов, который, по нашему мнению, должен стать неотъемлемой частью процесса обучения математике в школе. В него вошли обязательные (на наш взгляд) результаты логического воспита-

щённый изучению кванторов. Если быть более точным, следует различать грамматику кванторов и логику кванторов. Грамматика имеет дело с правилами образования предложений с кванторами, а логика — с их истинностными значениями.

ния учащихся на уроках математики в отношении кванторов. К ним относятся умения, перечисленные в последнем пункте положений, выносимых на защиту.

Во второй главе «Кванторы в обучении математике в школе» изложена методика включения перечисленных в разделе 1.4 необходимых элементов логики кванторов в процесс обучения математике.

В разделе 2.1 описана методика формирования у школьников умений усматривать в предложениях явно или неявно присутствующие в них кванторы, правильно понимать и формулировать предложения с кванторами.

Этому действительно нужно учить школьников, потому что, как уже было отмечено, во многих формулировках математических предложений из школьных учебников кванторы подаются в завуалированном виде, в то время как правильное понимание этих предложений без осознания присутствия в них кванторов очень часто оказывается невозможным.

Возьмём, к примеру, теорему о медианах треугольника (в традиционной формулировке): «Медианы треугольника пересекаются в одной точке». Совершенно естественно возникают три группы вопросов.

1) Медианы какого треугольника пересекаются в одной точке? Какого-нибудь одного? Каких-нибудь особых? Для каких треугольников годится приведённое доказательство?

2) Какие медианы? Эта и эта? Какие-нибудь две? Любые две? Или все три?

3) В какой одной точке? Какую ни возьми? Или в той, но не в этой? Известна ли заранее эта точка или её нужно найти в процессе доказательства?

В результате обсуждения ответов на эти и другие вопросы рождается точная формулировка приведённой выше теоремы: «Для любого треугольника существует точка, через которую проходят все три его медианы».

Весьма полезно также ставить подобные вопросы (мы называем их *кванторно-ориентированными*) в связи с ошибками учащихся, причём и с такими, которые, на первый взгляд, не связаны с кванторами.

Например, ученик преобразует модуль суммы двух чисел в сумму их модулей. Можно, конечно, просто сказать ему, что ни в коем случае не следует так поступать, ибо это неверно. Но гораздо полезнее будет поставить в связи с этой ошибкой ряд кванторно-ориентированных вопросов: «Для каких чисел модуль суммы равен сумме модулей? Для любых? Для некоторых? Существуют ли пары чисел, для которых модуль суммы равен сумме их модулей? Для любых ли двух чисел модуль их суммы равен сумме их модулей?»

Результатом такой работы явится не только осознание учеником допущенной им ошибки, не только возможное открытие им свойства: «Модуль суммы двух чисел равен сумме их модулей тогда и только тогда, когда произведение этих чисел неотрицательно», — но и прибавление в понимании роли кванторов в формулировке утверждений. Ученик поймёт, что: без кванторов, явных или подразумеваемых, предложение «Модуль суммы двух чисел равен сумме их модулей» не истинно и не ложно; если добавить к нему два квантора всеобщности, получится ложное высказывание; если же добавить два квантора существования, получится высказывание истинное.

С более сильными учениками можно продолжить постановку вопросов: «Существует ли число, модуль суммы которого с любым числом равен сумме их модулей? Для каждого ли числа существует число, модуль суммы которого с первым равен сумме их модулей?» и т. д.

Подобную деятельность можно (и чрезвычайно полезно) организовать по поводу практически любой из распространённых ошибок: «квадрат суммы равен сумме квадратов», «синус двойного угла равен удвоенному синусу этого угла», «арифметический квадратный корень из квадрата числа равен этому числу» и т. п.

В разделе 2.1 рассмотрены и другие примеры на формирование указанных выше умений. К сожалению, рамки реферата не позволяют сказать об этом более подробно.

В разделе 2.2 изложена методика формирования у школьников умений, связанных с доказательством и применением предложений с кванторами.

В большинстве теорем явно или неявно присутствуют сразу несколько кванторов. И трудность доказательства таких теорем во многом определяется именно этим.

Взять, к примеру, ту же теорему о медианах треугольника. Она, как мы показали, на самом деле содержит переплетение трёх кванторов, и сколько бы мы ни маскировали их присутствие, трудность понимания и доказательства теоремы от этого нисколько не уменьшится, а, напротив, только возрастёт.

Чтобы научить школьников преодолевать эти трудности, мы предлагаем процесс *поэтапного* обучения доказательству предложений с кванторами. На первом этапе доказываются предложения с одним квантором (либо с двумя одноимёнными кванторами, что, по существу, одно и то же). На втором этапе доказываются предложения с двумя разноимёнными кванторами в различном порядке, наконец, на третьем этапе мы предлагаем обучать школьников доказательству предложений с так называемыми «кванторными зигзагами»[6].

Мы не настаиваем на том, что всех и всему этому нужно обучать, но полагаем, что если за это браться, то последовательность действий должна быть именно такой.

В нашем исследовании мы демонстрируем это на примерах с квадратным трёхчленом. Нам это представляется важным, ибо на этих примерах школьники не только учатся доказывать предложения с кванторами, но и узнают много нового о квадратном трёхчлене.

В разделе 2.3 описана методика формирования у школьников умений рассуждать в соответствии с основными законами логики кванторов, распознавать и выявлять нарушения основных законов логики кванторов.

Начинать формирование этого умения можно практически на любом этапе обучения, даже с младшими школьниками. Для этих целей подходит разработанная нами система задач с разноцветными точками. Рассмотрим одну задачу. При этом ввиду невозможности цветной печати автореферата, мы заменили красные точки звёздочками, синие — кружочками, и соответствующим образом переформулировали задачу.

Задача. Пользуясь следующими рисунками, выясните, верно ли, что каждая звёздочка — угловая?

∗ ○ ∗	∗ ○ ∗	∗ ○ ∗	∗ ∗ ∗	∗ ○ ∗	∗ ○ ∗	∗ ○ ∗
○ ○ ○	○ ∗ ○	∗ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ∗	○ ∗ ○
∗ ○ ∗	∗ ○ ∗	∗ ○ ∗	∗ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗
а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)

∗ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ○	○ ○ ○
○ ○ ○	○ ○ ○	∗ ○ ○	○ ○ ○	○ ∗ ○	○ ○ ○	○ ○ ○
○ ∗ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ∗ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ∗	○ ○ ○
з)	и)	к)	л)	м)	н)	о)

Рис. 1.

Предлагая последовательно ученикам приведённые выше рисунки, ставим перед ними один и тот же вопрос: «Верно ли, что на предъявленном рисунке каждая звёздочка — угловая?» Для первого чертежа ответ положительный, для второго — отрицательный. Но обоснование

---

[6]Термин предложен А.Х. Назиевым.

этого может быть недостаточно общим (*эта* звёздочка не угловая). Предъявив ещё несколько подобных рисунков, учитель добивается от ученика понимания, что дело не в том, что та или иная звёздочка угловая, а в том, что ***найдётся*** такая звёздочка, которая не угловая. Постепенно уменьшая количество звёздочек, доходим до рис. 1, н), где изображена только одна звёздочка, и, наконец, до рис. 1, о), где нет ни одной звёздочки. Предыдущая работа помогает школьникам правильно ответить на поставленный в задаче вопрос.

Отметим, что, решая задачи с разноцветными точками, школьники также учатся рассуждать в соответствии с законами логики кванторов. Так, например, заметив, что на рис. 1, б) найдётся звёздочка, которая не угловая, ученик приходит к выводу, что неверно, что все звёздочки — угловые. Как видим, рассуждение школьника проведено в соответствии с так называемым законом отрицания обобщения.

Рассмотрим более сложный пример.

Задача. При каких a все решения неравенства

$$x^2 + ax + 1 < 0$$

принадлежат промежутку $(0; 3)$?

Большинство решающих эту задачу убеждены в том, что следует ограничиться рассмотрением случая, когда дискриминант D квадратного трёхчлена

$$x^2 + ax + 1 \qquad (1)$$

больше нуля. По этой причине получают только часть ответа к задаче. Другая его часть получается следующим образом.

Пусть $D \leqslant 0$, т. е. $a^2 - 4 \leqslant 0$, откуда $-2 \leqslant a \leqslant 2$. Тогда квадратный трёхчлен (1) имеет не более одного корня и, значит, промежутка между корнями не существует. Стало быть, рассматриваемое неравенство решений не имеет и, следовательно, все его решения принадлежат промежутку $(0; 3)$. Значит, все $a \in [-2; 2]$ являются искомыми.

Многих учащихся (и даже учителей) шокирует подобное решение. Они никак не могут согласиться с тем, что если у неравенства (уравнения) нет решений, то все его решения принадлежат любому промежутку.

Помочь школьникам освоиться с подобными утверждениями помогает рассмотренная выше методика, основанная на использовании задач с разноцветными точками.

Весьма полезной для формирования умений рассуждать в соответствии с основными законами логики кванторов, распознавать и выявлять нарушения основных законов логики кванторов может оказаться система задач о рыцарях и лжецах, разработанная (немного для других целей) А.Х. Назиевым для первокурсников и приспособленная нами для школьников.

Действие каждой задачи происходит на Острове рыцарей и лжецов, каждый житель которого либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы — только ложь. Все задачи оформлены в виде заметок путешественника о его пребывании на Острове.

Известно немало книг, в которых можно найти высказывания жителей Острова рыцарей и лжецов. При несомненном интересе, который представляют для нас эти высказывания, обращает на себя внимание тот факт, что в них почти не встречаются кванторные слова, а если и встречаются, то лишь для сокращения конъюнкций или дизъюнкций с двумя-тремя членами. Этот пробел позволяет заполнить обсуждаемая нами система задач о рыцарях и лжецах.

Задачи подобраны так, что «заставляют» решающего неявно использовать один или несколько законов логики кванторов. Чтобы это увидеть, каждое решение задачи мы сопровождаем подробным комментарием, где и показываем, какими законами логики кванторов школьник неявно пользуется, решая задачу.

Раздел 2.4 посвящён описанию организации, содержания и основных результатов педагогического эксперимента, проводимого с целью проверки гипотезы в соответствии с поставленными задачами исследования.

Педагогический эксперимент проводился в период с 2002 по 2006 гг. и условно состоял из трёх этапов: 1-й этап — констатирующий эксперимент (2002–2003); 2-й этап — поисковый эксперимент (2003–2004); 3-й этап — обучающий и контролирующий эксперимент (2004–2006). Эксперимент проводился в естественных условиях учебного процесса на базе МОУ СОШ № 12 г. Коломны, МОУ гимназии № 2 «Квантор» г. Коломны и Межшкольного учебного комбината г. Коломны.

На *первом этапе* решались следующие задачи: выявление места и роли кванторов в школьном курсе математики, изучение и обобщение опыта работы учителей математики г. Коломны, накопление собственного педагогического опыта. В ходе этого этапа были выявлены существенные связанные с кванторами недостатки обучения математике в школе и необходимость разработки методики, позволяющей устранить или хотя бы ослабить выявленные недостатки.

Используемые методы — беседы со школьниками и учителями, анализ письменных работ учащихся, анкетирование, посещение и анализ уроков учителей математики, участие в методических семинарах.

На *втором этапе* решались следующие задачи: разработка и внедрение в процесс обучения математике методики формирования умений усматривать в предложениях явно или неявно присутствующие в них кванторы, правильно понимать и формулировать предложения с кванторами, доказывать и применять предложения с кванторами, рассуждать в соответствии с основными законами логики кванторов, распознавать и выявлять нарушения основных законов логики кванторов. На этом же этапе была сформулирована *гипотеза* эксперимента: обучение школьников на основе разработанной методики позволяет повысить качество знаний и способствует повышению интереса учащихся к математике.

На *третьем этапе* проводился обучающий и контролирующий эксперимент. В нём приняли участие выпускники основной школы МОУ СОШ № 12, одиннадцатиклассники МОУ гимназии № 2 «Квантор», МОУ гимназии № 8, МОУ СОШ № 7,12,14,21,30.

Для проверки эффективности предлагаемой методики были выбраны (в 2004–2005 уч. г.) общеобразовательные классы МОУ СОШ № 12 г. Коломны: 8 «А» класс (экспериментальная группа, 28 уч-ся) и 8 «Г» класс (контрольная группа, 25 уч-ся).

Анализ успеваемости и качества знаний учащихся экспериментальной группы (ЭГ) и контрольной группы (КГ) говорил о равенстве стартовых возможностей школьников.

Анализ и итоги экспериментального обучения производились на основе изучения динамики успеваемости и качества знаний школьников на протяжении двух лет.

В следующей таблице приведены данные о качестве знаний учащихся ЭГ и КГ до начала эксперимента и после его окончания (успеваемость в ЭГ и КГ — 100%).

Качество знаний	До начала эксперимента		После окончания эксперимента	
	ЭГ (%)	КГ (%)	ЭГ (%)	КГ (%)
Алгебра	57,1	60	75	60
Геометрия	53,6	52	67,9	56

Табл. 1

Усвоение материала проверялось с помощью плановых контрольных работ и диагностических срезов. Сравнительный анализ результатов этих работ показал, что уровень усвоения материала в ЭГ выше, чем в КГ. Статистическая обработка результатов выполнения контрольных работ и диагностических срезов осуществлялась на основе критерия Вилкоксона-Манна-Уитни и критерия φ^* (углового преобразования Фишера).

Весьма значимым оказался и тот факт, что геометрию как устный экзамен по выбору сдавали 7 учащихся ЭГ (25%) и только 2 ученика

КГ (8%). Интересно отметить, что в течение последних трёх лет выбор этого экзамена выпускниками основной школы МОУ СОШ № 12 г. Коломны не превышал 12%, так как, по мнению учащихся, геометрия является одним из самых сложных предметов. Результаты экзамена в экспериментальном классе: качество знаний — 100%.

В следующей таблице представлен выбор экзамена по геометрии учащимися 9 «А» класса МОУ СОШ № 12 (ЭГ, 28 уч-ся) в сравнении с выбором выпускниками основной школы (КГ, 87 уч-ся) в 2003–2005 гг.

Учащиеся	Выбрали	%	Не выбрали	%
ЭГ	7	25	21	75
КГ	9	11,5	78	88,5

Табл. 2

Экспериментальное обучение охватывало также 11-е классы МОУ гимназии № 2 «Квантор» г. Коломны, в которых автор вёл межклассный факультатив по подготовке учащихся к сдаче государственного экзамена по математике за курс средней школы в форме ЕГЭ (2005–2006 уч. г.).

При работе с одиннадцатикласниками особое внимание уделялось обучению школьников решению задач с параметрами уровня «С» ЕГЭ.

Сравнивались: результаты государственного экзамена по математике выпускников МОУ гимназии № 2 «Квантор», посещавших в 2005–2006 уч. г. межклассный факультатив и выбравших ЕГЭ в качестве формы итоговой аттестации (ЭГ), с результатами ЕГЭ других выпускников гимназии, не посещавших факультатив (КГ). Согласно протоколу государственной экзаменационной комиссии средний балл ЕГЭ в ЭГ составил 67,4; в КГ — 53,6. Таким образом, средний балл в ЭГ выше, чем в КГ. Критерий Вилкоксона-Манна-Уитни статистически подтверждает это.

Положительные результаты получены и при апробации разработанной методики для подготовки учащихся к ЕГЭ в сводной группе из нескольких образовательных учреждений г. Коломны в Межшкольном учебном комбинате. Все 15 учащихся МОУ гимназии № 8, МОУ СОШ № 7,12,14,21,30, посещавшие курсы, выбрали форму ЕГЭ в качестве выпускного экзамена по математике. Это свидетельствует о том, что школьники почувствовали уверенность в своих знаниях, в том, что смогут достойно выдержать независимую экспертизу. Особенно показательным в этом отношении является 2006 год, когда вузы не предоставляли абитуриентам иных форм вступительных испытаний, если те уже сдали ЕГЭ. Средний балл учащихся сводной группы: 68,3.

Таким образом, результаты эксперимента полностью подтверждают гипотезу исследования.

В **заключении** диссертации сформулированы основные результаты исследования, намечены перспективы дальнейших исследований.

В ходе теоретического и экспериментального исследования поставленной научной проблемы в соответствии с целями и задачами исследования получены следующие **научные результаты:**

— определены место и роль кванторов в школьной математике;
— исследован вопрос об использовании законов логики кванторов в школьном курсе математики;
— исследована возможность эффективного использования некоторых законов логики кванторов в работе учителя математики;
— выявлены связанные с кванторами недостатки обучения математике в школе;
— составлен перечень необходимых элементов логики кванторов;
— разработана и внедрена методика включения этих элементов в процесс обучения математике;
— проведён педагогический эксперимент по проверке эффективности предлагаемой методики, результаты которого подтверждают выдвигаемую в исследовании гипотезу.

Итак, цель нашего исследования достигнута, задачи решены, гипотеза подтверждена.

Безусловно, проведённое исследование не исчерпывает всей сложности проблемы. Полученные теоретические и практические результаты можно использовать для дальнейшего исследования логических проблем обучения математике в школе. Одним из направлений дальнейшего исследования может стать разработка методики обучения школьников проведению рассуждений в соответствии с правилами умозаключений логики.

Публикации автора по теме диссертации

Публикация в журнале, рекомендованном ВАК

1. Камышов, А.В. Кванторы в обучении математике в школе / А.В. Камышов // Наука и школа. — 2007. — № 1. — С. 41–43. (0,3 п.л.)

Статьи

2. Камышов, А.В. Кванторы при изучении темы «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» / А.В. Камышов // Сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. В.П. Савинкина. — Коломна, 2004. — Вып. 3. — С. 120–122. (0,2 п.л.)

3. Камышов, А.В. Кванторы при решении дизъюнкций тригонометрических уравнений / А.В. Камышов // Сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. В.П. Савинкина. — Коломна, 2005. — Вып. 4. — С. 128–132. (0,3 п.л.)

4. Камышов, А.В. Тригонометрические уравнения и кванторы / А.В. Камышов // Начало: сборник научных статей аспирантов и соискателей / под ред. А.В. Кулагина. — Коломна, 2006. — Вып. 5. — С. 204–208. (0,3 п.л.)

Материалы конференций

5. Камышов, А.В. О роли кванторов при изучении темы «Взаимное расположение двух прямых в пространстве» / А.В. Камышов // Актуальные проблемы преподавания математики в педагогических вузах и средней школе: Тез. докл. XXIII Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и пед. вузов, 13–15 октября 2004 г. / гл. ред. Е.В. Яковлев. — Челябинск; М., 2004. — С. 201–202. (0,1 п.л.)

6. Камышов, А.В. О роли кванторов при решении простейших тригонометрических уравнений / А.В. Камышов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. — Воронеж, 2005. — С. 109. (0,06 п.л.)

7. Камышов, А.В. О роли кванторов при решении систем тригонометрических уравнений / А.В. Камышов // Математика. Компьютер. Образование: Тез. докл. XII Международной конференции, г. Пущино, 17–22 января 2005 г. / под ред. Г.Ю. Ризниченко. — М.; Ижевск, 2005. — С. 116. (0,06 п.л.)

8. Камышов, А.В. К вопросу о геометрической интерпретации кванторов / А.В. Камышов // Современные проблемы школьного и вузовского математического образования: Тез. докл. XXIV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и пед. вузов / под ред. А.Г. Мордковича, И.К. Кондауровой. — М.; Саратов, 2005. — С. 105–106. (0,1 п.л.)

9. Камышов, А.В. К вопросу о решении задач с параметрами из ЕГЭ / А.В. Камышов // Современные проблемы преподавания математики и информатики: сб. науч. ст. по итогам III Междунар. научно-метод. конф. — Волгоград, 2006. — С. 45–48. (0,25 п.л.)

10. Камышов, А.В. К вопросу об использовании закона специализации / А.В. Камышов // Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: Материалы XXV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов. — Киров; М., 2006. — С. 232. (0,06 п.л.)

Подп. к печ. 15.02.2007 Объем 1 п.л. Заказ № 44 Тир 100 экз.

Типография МПГУ