УДК 517.95 + 533.6

на правах рукописи

Дерябин Сергей Львович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ВАКУУМ

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2005

Работа выполнена в Институте вычислительных технологий СО РАН и Уральском государственном университете путей сообщения на кафедре "Прикладная математика".

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Андреев В.К.
доктор физико-математических наук, профессор Куропатенко В.Ф.
доктор физико-математических наук, профессор Хакимзянов Г.С.

Ведущая организация:

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
(Москва)

Защита состоится "28" "декабря" 2005 г. в 14 часов, на заседании Диссертационного совета Д 003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск-90, проспект академика Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки ИВТ СО РАН (проспект академика Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан "28" "ноября" 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Чубаров Л.Б.

Общая характеристика работы.

Диссертация [1] посвящена разработке аналитических методов математического моделирования истечения идеального газа в вакуум. Исследуются основные конфигурации одномерных и многомерных течений, возникающие при истечении в вакуум политропного газа, а также газа с другими уравнениями состояния. В частности, моделируется эволюция примыкающих к вакууму течений газа, которые испытывают воздействие внешних массовых сил или гравитируют по Ньютону. Кроме этого рассматриваются смежные проблемы, связанные с появлением в исследуемых течениях бесконечных градиентов.

Актуальность темы.

Решение важных теоретических и прикладных задач механики сплошных сред практически невозможно без математического моделирования. Перечислим некоторые из задач газовой динамики и астрофизики, основные элементы решений которых строятся с помощью предложенного подхода:

– описание процесса разлета газового шара, а также его схлопывания под действием самогравитации – одна из фундаментальных проблем астрофизики;

– исследование эффектов кумуляции при схлопывании полости в сплошной среде. Именно такие течения возникают в некоторых физических экспериментах при получении больших локальных значений плотности специальных сред, в том числе для инициирования термоядерного синтеза. Кроме того, подобные течения возникают при кавитации воздушных пузырьков на гребных винтах и подводных крыльях;

– исследование различных струй, включая кумулятивные, границы которых априори являются свободными.

Особо отметим, что многие решения системы уравнений газовой динамики, описывающие при $t \geq t_0$ истечение газа в вакуум (начиная с момента времени t_0) также при $t \leq t_0$ передают процессы неограниченного сжатия газа, наступающего в момент $t = t_0$. Исследование процессов либо неограниченного, либо очень сильного сжатия газа имеет принципиальное значение для многих физических экспериментов по осуществлению управляемого термоядерного синтеза.

Значительная часть физических процессов и явлений, происходящих в сплошных средах, описывается с помощью систем дифференциальных или интегродифференциальных уравнений с частными производными. Такие уравнения – это сложный математический объект исследования, особенно если они нелинейные или имеют особенности. Поэтому кроме исследования конкретных физических и механических задач актуально исследование самой

[1]Исследование поддержано РФФИ, проекты 02-01-01122, 04-01-00205.

математической модели в следующих направлениях: постановки начально-краевых задач со свободными границами, которые сами являются одним из искомых элементов задачи и доказательство существования и единственности решений. Кроме этого для нелинейных уравнений с частными производными актуальными и трудными являются вопросы конструктивного построения решений, в том числе с раскрытием различных особенностей.

Построение и исследование решений нелинейных уравнений с частными производными в настоящее время ведется с помощью двух подходов: аналитического и численного.

Численные методы решения развиваются очень активно, что в первую очередь связано с наличием мощных процессоров. Однако для многих нелинейных задач, решения которых обладают различными особенностями (большие градиенты, малые или очень большие значения плотности, состыковка областей с принципиально различными значениями параметров потока, наличие особых точек на границах областей существования решений и т.д.), применение численных методов зачастую не дает надежных результатов.

Исследование нелинейных задач с помощью аналитических методов имеет свои принципиальные трудности, в основе которых лежат все те же особенности решений нелинейных задач. Эти затруднения связаны во многих случаях с отсутствием строго доказанных фактов о существовании решений и знаний об их свойствах. Очень осложняет положение большой объем выкладок и построений, необходимых для практического применения аналитических подходов. К тому же, не очень велик и сам набор эффективных аналитических методов исследования нелинейных задач: метод дифференциальных связей [2]; групповой анализ нелинейных уравнений с частными производными [3]; представление решений в виде рядов [4] [5]; различные асимптотические разложения и некоторые другие аналитические подходы.

В данной диссертации математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум проводится с помощью аналитического исследования решений нелинейных начально-краевых задач, в том числе с использованием различных сходящихся рядов.

Одним из самых важных результатов аналитических исследований служит установление и выявление физических и газодинамических эффектов, которые трудно (а порой и невозможно) предсказать с помощью численных

[2] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука. – 1984. – 272 с.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1978. – 400 с.

[4] Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. – М.: Физматлит. – 2001. – 576 с.

[5] Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. – Новосибирск: Наука. – 1997. – 160 с.

расчетов. Это, в свою очередь, позволяет строить вычислительные процедуры, учитывающие особенности решений конкретных математических моделей. Яркий пример подобных вычислительных процедур – это разностная схема С.К. Годунова [6] и ее модификации, построенные на базе точного решения задачи о распаде разрыва уже почти полвека используемые при численном решении задач газовой динамики.

Объект исследования.

Начальным этапом математического моделирования был и остается выбор математической модели. В настоящей диссертации исследуется система уравнений газовой динамики, являющаяся системой гиперболического типа. Поскольку в работе исследуются газовые течения либо без ударных волн, либо до момента их возникновения, то основным элементом при построении сложных конфигураций течений служат характеристические поверхности – поверхности слабых разрывов. У системы уравнений газовой динамики имеются две звуковые характеристики, каждая кратности один, а также контактные характеристики, которые в зависимости от размерности задачи имеют кратность от нуля до трех. При учете более сложных физических эффектов математическая модель, то есть система уравнений газовой динамики, усложняется. В частности, при учете сил гравитации по Ньютону приходится рассматривать интегродифференциальную систему, у которой подынтегральная функция имеет известную особенность.

Среди всех краевых задач для нелинейных систем уравнений с частными производными особое место занимают задачи со свободными границами. На таких границах заданы значения некоторых искомых функций (как правило, давление), но положение самих границ и законы их движения заранее не известны, и они – искомые элементы в соответствующих начально-краевых задачах. К таким задачам со свободными границами и относятся задачи об истечении газа в вакуум, рассматриваемые в настоящей диссертации.

Сформулируем две основные задачи, исследуемые в диссертации:

1). Задача о распаде специального разрыва, при котором возникает истечение газа в вакуум;

2). Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму.

Постановки этих задач следующие.

Задача о распаде специального разрыва. Пусть в момент времени $t = t_0$ поверхность Γ, проходящая через точку $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$, отделяет находящийся по одну сторону от Γ идеальный газ от вакуума. В этот момент времени $t = t_0$ известны распределения параметров газа: $\rho = \rho_0(\mathbf{x})$ – плотность газа; $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x})$ – вектор скорости газа; $S = S_0(\mathbf{x})$ – энтропия. Предполагается,

[6] Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. – 1959. – Т. 47(89).– Вып. 3. – С. 271–306.

что плотность газа $\rho_0(\mathbf{x})$ всюду больше нуля, в том числе $\rho_0(\mathbf{x})|_\Gamma > 0$. В момент времени $t = t_0$ начинается движение газа, определяемое заданными при $t = t_0$ распределениями ρ_0, $\mathbf{V}_0$, S_0, которое в дальнейшем называется фоновым течением. В частности, фоновое течение может быть однородным покоем. В тот же начальный момент времени $t = t_0$ помимо начала движения фонового течения поверхность Γ мгновенно разрушается и начинается истечение части газа в вакуум. Возмущения, возникшие в результате мгновенного разрушения поверхности Γ, распространяются по газу в виде волны разрежения, отделенной от фонового течения границей Γ_1, являющейся поверхностью слабого разрыва. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму: $\rho_0(\mathbf{x})|_{\Gamma_0} = 0$, где Γ_0 – заранее неизвестная свободная поверхность, являющаяся границей, разделяющей волну разрежения и вакуум.

В задаче о распаде специального разрыва требуется построить фоновое течение и волну разрежения, а также найти законы движения Γ_1 и Γ_0.

Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму. Пусть в некоторый момент времени $t = t_0$ по одну сторону от заданной поверхности Γ известны параметры газа $\rho|_{t=t_0} = \rho_0(\mathbf{x})$; $\mathbf{V}|_{t=t_0} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x})$; $S|_{t=t_0} = S_0(\mathbf{x})$, а по другую сторону от Γ – вакуум, причем $\rho_0(\mathbf{x})|_\Gamma = 0$.

В задаче о непрерывном примыкании газа к вакууму требуется при $t > t_0$ определить закон движения самой свободной поверхности Γ_0 и построить течение в ее окрестности.

Если начальные распределения параметров газа $\rho_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}_0(\mathbf{x})$, $S_0(\mathbf{x})$ и поверхность Γ задаются функциями, аналитическими в окрестности точки $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$, то в решении задач свободная поверхность Γ_0 (хотя бы некоторое время) будет гладкой. Такая задача называется квазиодномерной, поскольку какое-то время основные свойства течений будут близки к свойствам одномерных течений, примыкающих к вакууму.

Другой случай в задаче о распаде специального разрыва – задача с угловой точкой на свободной поверхности – можно получить двумя способами.

Во-первых, начальные распределения газодинамических параметров могут быть аналитическими функциями, но точка $\mathbf{x}^0$ при этом является угловой точкой исходной поверхности Γ, то есть начальная поверхность Γ состоит из двух или из большего числа разных частей.

Вторая возможность появления угловой точки на Γ_0 : исходная поверхность Γ задается одной аналитической функцией, но начальные распределения газодинамических параметров или их производные терпят разрыв.

Сложность исследованию задачи о распаде специального разрыва придают следующие обстоятельства:

– необходимо с помощью задания специальных граничных условий описать особенность решения, которая имеет место в момент мгновенного убирания стенки Г, то есть в момент времени $t = t_0$ (в момент распада разрыва);

– при описании примыкания волны разрежения к фоновому течению возникает характеристическая задача Коши, когда начальные данные задаются на характеристической поверхности, и следовательно, определитель матрицы перед вектором выводящих с этой поверхности производных равен нулю;

– необходимость построения нелокального решения начально-краевой задачи в том числе для того, чтобы определить закон движения свободной поверхности и найти значения параметров газа во всей области течения от Γ_1 до Γ_0.

В задаче о непрерывном примыкании газа к вакууму сложности следующие:

– начальные данные задаются на характеристике кратности, равной числу уравнений в системе уравнений газовой динамики;

– в течении возникают бесконечные производные от газодинамических параметров, поскольку градиентная катастрофа имеет место не только в волнах сжатия, но также и в рассматриваемых волнах разрежения.

Все указанные обстоятельства существенно осложняют описание течений численными методами особенно в начальные моменты времени после распада разрыва, а также в непосредственной окрестности границы "газ-вакуум".

Цель работы.

Основная цель данной диссертации – моделирование различных течений идеального политропного газа, примыкающих к вакууму. Эта цель достигается с помощью последовательного решения следующих задач:

– построение с помощью рядов решений квазиодномерных задач о распаде специального разрыва и о непрерывном примыкании газа к вакууму;

– исследование областей сходимости построенных рядов;

– установление точного закона движения свободной поверхности;

– выявление тех особенностей и особых точек течений, которые имеют место на свободной поверхности и на слабом разрыве;

– исследование свойств течений в окрестностях этих особых точек;

– построение течений, имеющих на свободной поверхности угловые точки;

– исследование течений политропного газа в условиях действия внешних массовых сил и гравитирующих по Ньютону;

– рассмотрение течений газа с другими уравнениями состояния;

Методология исследования.

При решении сформулированных задач используется методология характеристической задачи Коши и представление ее решения в виде степенных рядов. Но поскольку большинство из построенных в работе решений имеют какие-либо особенности, то для их раскрытия часто делаются вырожденные замены переменных (например, с использованием логарифмов или дробных *степеней*) и строятся ряды в специальных пространствах.

Кроме этого, проводится исследование особых точек в построенных течениях: *центры симметрии*, *угловые точки свободных поверхностей и звуковых характеристик* – в этих точках решения, *как правило*, теряют аналитичность. Для состыковки различных течений производится переразложение построенных решений в окрестностях особых точек. При этом, как правило, невозможно полное описание сложных течений с помощью функций, аналитических во всей рассматриваемой области. В этом состоит ограниченость используемого метода представления решения характеристической задачи Коши в виде рядов.

Исследования, проведенные в диссертации, привели к созданию единой методики решения задач об истечении газа в вакуум. Эта методика состоит из следующих основных моментов.

1. Введение вместо декартовой системы координат другой координатной системы, обусловленной конкретной геометрической и газодинамической ситуацией.

2. Перемена ролей у зависимой и независимой переменных для описания течений, возникающих в задаче о распаде специального разрыва и имеющих в физическом пространстве бесконечные значения производных.

3. Постановка начально-краевых задач в пространстве специальных независимых переменных. Как правило, эти задачи являются характеристическими задачами Коши, которые удается свести к стандартному виду.

4. Представление решений полученных характеристических задач Коши в виде рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами. При этом коэффициенты для части искомых функций находятся при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а для остальных – из решения систем линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля главным определителем.

5. Установление локальной сходимости рядов сведением к теореме о существовании и единственности аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида.

6. Детальный анализ структуры коэффициентов рядов с целью выявления их особенностей, а также полиноминальной структуры коэффициентов по каким-либо переменным и описание на этой основе области сходимости рядов.

7. Установление свойств решений, в том числе определение точного закона движения свободной границы и значений газодинамических параметров на ней.

8. Построение решения характеристической задачи Коши в физическом пространстве в случае непрерывного примыкания газа к вакууму, когда кратность характеристики, несущей начальные данные для этой задачи, совпада-

ет с числом уравнений в исходной системе уравнений с частными производными.

9. Выявление особенностей, которые возникают на свободной поверхности, с помощью исследования системы транспортных уравнений, описывающих поведение первых выводящих со свободной поверхности производных.

10. С помощью специальных вырожденных замен переменных внесение конкретных особенностей в решения для построения течений в окрестностях особых точек, включая ось или центр симметрии.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Для поставленных начально-краевых задач как в задаче о распаде специального разрыва, так и в задаче о непрерывном примыкания газа к вакууму в случае многомерных течений политропного газа построены кусочно-аналитические решения, описывающие истечение газа в вакуум. В качестве одного из элементов составного решения построено обобщение простой центрированной волны Римана на случай (t, x_1, x_2, x_3). Установлено существование и единственность аналитических решений во всей области волны разрежения от слабого разрыва до свободной поверхности включительно.

2. На основе анализа построенных решений определены законы движения свободной поверхности как в задаче о распаде специального разрыва, так и в задаче о непрерывном примыкания газа к вакууму. В многомерных течениях каждая частица газа на свободной поверхности движется по своей прямой со своей постоянной скоростью. В этом случае скорость истечения газа на свободной поверхности определяется как геометрией исходной поверхности раздела "газ-вакуум", так и начальными распределениями параметров газа на ней. В частном случае линейчатых свободных поверхностей доказано, что свободная поверхность до возникновения особенностей в течении стоит на месте, а частицы газа движутся каждая со своей постоянной скоростью вдоль образующих этой поверхности.

3. Получены системы транспортных уравнений, описывающие поведение первых производных, выводящих со свободной поверхности, и исследованы их решения. Это позволило определить моменты времени и места возникновения в течениях газа градиентных катастроф, которые в свою очередь определили временные границы существования построенных решений. В том числе в случае разлета газа бесконечные значения производных возникают на поверхности фокусирующегося слабого разрыва, а на свободной поверхности никаких особенностей нет. В случае схлопывания одномерной полости, наоборот, бесконечные значения производных возникают на свободной поверхности. В общем случае трехмерных течений при исследовании систем транспортных уравнений для свободной поверхности найдена зависимость критических значений показателя адиабаты от главных кривизн исходной

поверхности раздела $\gamma_* = \gamma_*(k_1, k_2)$: если $\gamma < \gamma_*$, то градиентная катастрофа наступает в момент появления угловой точки на свободной поверхности; если $\gamma > \gamma_*$, то градиентная катастрофа возникает еще до этого момента.

4. В задаче о распаде специального разрыва и в задаче о гладком примыкании газа к вакууму полученные результаты обобщены: на случай одномерных течений нормального газа с достаточно общим уравнением состояния; на случай трехмерных течений политропного газа, который находится в поле действия внешних массовых сил; а также на на случай одномерных течений политропного газа, гравитирующего по Ньютону. В частности установлено, что при наличии внешней силы каждая частица на свободной поверхности движется как материальная точка в поле этой силы. Определена для самогравитирующего газа ситуация, когда при разлете газ останавливается и после этого момента начинается схлопывание всей массы газа. Выявлено регулирующее воздействие гравитации на течение газа: отсутствие градиентной катастрофы на свободной поверхности до момента фокусировки газа на ось или в центр симметрии.

5. Построены решения задачи со специально подобранными начальными условиями, моделирующие закрученные и струйные течения. Установлено, что в случае закрученных течений свободная поверхность остается осесимметричной и движется от оси симметрии. При исследовании систем уравнений переноса и систем транспортных уравнений показано, что особенности в струйных течениях возникают в двух ситуациях: 1) частицы газа, движущиеся вдоль свободной границы Γ_0, набегают одна на другую и течение "опрокидывается"; 2) градиентная катастрофа происходит за счет уплотнения среды, примыкающей к свободной поверхности Γ_0. Следовательно, в струйных течениях градиентные катастрофы на поверхности Γ_0 возникают по разным направлениям.

6. Построены кусочно-составные течения, возникаюшие как при одновременном, так и при последовательном убирании в разные моменты времени двух взаимно пересекающихся плоскостей, отделяющих в начальный момент времени однородный покоящийся газ от вакуума. Установлено существование угловых точек на свободной поверхности, а также определены законы движения различных частей свободных поверхностей и поверхностей слабых разрывов.

7. Построены различные представления решений одномерных уравнений газовой динамики в окрестности оси или в центра симметрии и исследованы их свойства. Описано течение, возникшее в результате разрушения конической поверхности, по одну сторону от которой находился вакуум а по другую – однородный покоящийся газ. В частности, решение задачи о распаде специального разрыва вдали от точки фокусировки слабого разрыва на ось сим-

метрии построено в виде сходящихся рядов во всей области течения, включая свободную поверхность. В окрестности точки фокусировки слабого разрыва установлено, что область сходимости рядов имеет секториальный вид. Также построено другое представление решения в окрестности оси симметрии, которое стыкуется с исходным однородным покоящимся газом.

Теоретическое значение и научная новизна.

В диссертации проведено законченное исследование одномерных и многомерных задач об истечении газа в вакуум. Разработаны теоретические положения по методологии исследования этих задач. Тем самым решена научная проблема по адекватному моделированию истечения идеального газа в вакуум.

Это потребовало формулировки новых начально-краевых задач, а именно, характеристических задач Коши с данными на звуковых характеристиках и на кратных характеристиках как в физическом, так и в специальном функциональном пространствах.

Поскольку в начальные моменты времени после распада специального разрыва, а также в окрестности границы "газ-вакуум" исследование этих задач численными методами практически невозможно, разработана методология аналитического решения сформулированных задач.

В основе этой методологии лежит доказательство существования локально-аналитических решений начально-краевых задач и их конструктивное построение в виде степенных рядов с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами.

Далее для описания всей картины течения построенные решения состыковываются между собой непрерывно или приближенно. Это позволило с большой степенью достоверности представить всю картину истечения газа в вакуум, выявить возникающие особенности и, в частности, во многих случаях получить точный закон движения границы "газ-вакуум" и значения параметров газа на ней.

Практическая ценность работы определяется ее важностью с точки зрения приложений. Построенные решения могут использоваться для:

1. Описания процесса разлета газового шара, а также его схлопывания под действием самогравитации;

2. Исследования эффектов кумуляции при схлопывании полости в сплошной среде. Именно такие течения возникают в некоторых физических экспериментах при получении больших локальных значений плотности специальных сред, в том числе для инициирования термоядерного синтеза. Кроме того, подобные течения возникают при кавитации воздушных пузырьков на гребных винтах и подводных крыльях;

3. Исследования различных струй, включая кумулятивные, границы ко-

торых априори являются свободными;

4. Описания процессов неограниченного сжатия газа. Исследование процессов либо неограниченного, либо очень сильного сжатия газа имеет принципиальное значение для многих физических экспериментов по осуществлению управляемого термоядерного синтеза.

Кроме того полученные в диссертации результаты можно использовать для правильной постановки начально-краевых задач и граничных условий в численных исследованиях задач со свободными границами.

И наконец, построенные решения могут использоваться для тестирования численных методик.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается:

математически строгой постановкой начально-краевых задач;

построением в виде рядов полных разложений решений этих задач и их исследованием;

доказательством теорем о свойствах областей сходимости построенных решений

– то есть математически строго доказанными фактами.

Личный вклад автора.

Постановка одномерных начально-краевых задач о распаде специального разрыва и их решения, приведенные для полноты изложения в §1 пункте 1.2, получены С.П. Баутиным [7]. Задачи об истечении в вакуум нормального газа, представленные в §2, решены автором совместно с С.П. Баутиным в работе [9], в которой автору принадлежат постановка задачи, построение решения и анализ структуры коэффициентов ряда, а С.П. Баутиным доказана теорема 2.2. Задачи об истечении в вакуум газа гравитирующего по Ньютону (§3) решены автором совместно с Н.П. Чуевым [10], а также исследованы автором в работе [11]. В работе [10] автору принадлежат постановка задач, построение решений и доказательство всех теорем, а Н.П. Чуевым исследовалась задача о непрерывном примыкании газа к вакууму. Исследования в совместных работах [1, 3, 6] проведены автором и С.П. Баутиным с равным творческим вкладом. В совместно с С.П. Баутиным опубликованной книге [14]: автором единолично написаны §§4–9, 11, 12; автором совместно с С.П. Баутиным написаны введение, §§2, 3, 10, заключение и библиографический обзор; С.П. Баутиным единолично написаны §§1, 13–16.

Публикации.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в 24 печатных работах, куда входят: одна монография [14], издательства Наука, а также 12

[7]Баутин С.П. Одномерное истечение газа в вакуум // Численные методы механики сплошной среды. – 1983. – Т. 14, № 4. – С. 3–20.

статей [1-3,5-13], опубликованных в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на IX Всероссийской школе – семинаре "Аналитические методы в газовой динамике" (Свердловск 1982 г.), Всесоюзной конференции "Многомерные задачи механики сплошной среды" (Красноярск 1982 г.) Всесоюзной конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики" (Москва 1990 г.), Международной конференции "Free-boundary problems in continuum mechanics" (Новосибирск 1991 г.), Всероссийских школах – семинарах "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (Екатеринбург 1992 г., Саров 1994 г., Уфа 1998 г., Абрау-Дюрсо 2004 г.), VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике. (Пермь 2001 г.), VII, VIII Международных конференциях "Забабахинские научные чтения", (Снежинск 2003, 2005 гг.), Всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика А.Ф. Сидорова "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", (Екатеринбург 2003 г.), Всероссийской конференции, приуроченной к 85-летию академика Л.В. Овсянникова "Новые математические модели механики сплошной среды: построение и изучение", (Новосибирск 2004 г.), Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", (Новосибирск 2005 г.).

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения трех глав и заключения. Список литературы содержит 191 наименование. Объем диссертации 227 страниц.

Основное содержание работы.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследуемых в диссертации задач. Приводится обзор литературы по изучаемой и смежной тематике. Кратко излагается содержание диссертации.

Глава I (§§ 1 – 3) посвящена исследованию одномерных течений политропного газа и газа с другими уравнениями состояния.

В §1 рассматриваются одномерные изэнтропические течения идеального политропного газа, возникшие при разлете в вакуум первоначально однородного и покоящегося газового шара или цилиндра. Вначале для полноты изложения приводится ранее построенное С.П. Баутиным[7] решение задачи о распаде специального разрыва, описывающее течение в окрестности Γ_0 во все моменты времени, а в окрестности фокусирующей в центр или на ось симметрии поверхности Γ_1 – только до момента ее фокусировки. Затем для раскрытия особенности течения в момент фокусировки поверхности Γ_1 с использованием вида решений транспортных уравнений выбрано специальное функциональное пространство и решение в нем построено в виде сходящихся рядов вплоть до момента фокусировки поверхности слабого разрыва на ось или в центр симметрии включительно. Доказывается, что в физическом пространстве области сходимости этих рядов носят секториальный характер и с их помощью нельзя получить распределения параметров газа в момент времени $t = t_*$ (момент фокусировки слабого разрыва на ось или в центр симметрии). В физическом пространстве в окрестности оси или центра симметрии построено в виде ряда еще одно течение, примыкающее через слабый разрыв к покоящемуся газу. Это решение является фактически переразложением предыдущего решения по другим переменным. У этого ряда хотя и не доказана сходимость, но детально исследована структура коэффициентов и показана аналитичность коэффициентов в области между двумя характеристиками: пришедшей на ось или в центр симметрии и отраженной. Поскольку переразложение проводилось в окрестности оси или центра симметрии (особой точки), то оба построенных решения удалось состыковать только приближенно.

В §2 исследуются одномерные течения идеального нормального газа в предположении, что на функцию, задающую уравнение состояния, наложены некоторые условия, которые позволяют построить решения начально-краевых задач в виде сходящихся рядов. Детальный анализ структуры коэффициентов рядов показал: при малых t область сходимости рядов содержит всю волну разрежения – от слабого разрыва до свободной поверхности включительно, и каждая частица газа на Γ_0 движется с постоянной скоростью.

В §3 исследуются одномерные течения идеального политропного газа в предположении, что на массу газа действует ньютоновское тяготение. Решения построены в виде сходящихся рядов и доказано, что область сходимости этих рядов содержит всю волну разрежения – от слабого разрыва до свободной поверхности включительно. В задаче о схлопывании одномерной полости показано, что свободная поверхность "газ-вакуум" движется с постоянной скоростью, такой же, как и при отсутствии гравитации. В задаче о разлете газа установлено, что закон движения свободной поверхности совпадает с законом движения частиц в поле притяжения материальной точки.

Глава II (§§ 4–8) посвящена исследованию трехмерных течений идеального политропного газа в случае аналитических начальных данных и гладкой начальной поверхности раздела газ-вакуум. Исследования показали, что можно выделить два принципиально различных случая: вектор скорости газа не лежит или лежит в касательной плоскости к исходной поверхности Г. В четвертом и пятом параграфах исследуется первая ситуация, а в шестом и седьмом — вторая. В восьмом параграфе полученные результаты обобщаются на случай действия внешних массовых сил.

В §4 рассматривается частный случай трехмерного истечения в вакуум, когда исходная поверхность отделяет вакуум от однородного покоящегося газа. В этом случае неодномерность задачи связана только с неодномерной геометрией исходной поверхности раздела. По изложенной ранее методике решения задач о распаде разрыва и о непрерывном примыкании газа к вакууму построены в виде сходящихся рядов и доказано, что свободная поверхность некоторое время будет двигаться с постоянной скоростью. Исследование транспортных уравнений позволило найти моменты времени, когда на свободной поверхности возникают бесконечные производные. Также была найдена зависимость критических значений $\gamma_* = \gamma_*(k_1, k_2)$ (k_1, k_2 — главные кривизны исходной поверхности раздела): если $\gamma < \gamma_*$, то первая особенность на $\mathbf{\Gamma}_0$ возникает на том луче, на котором достигается минимум всех радиусов кривизны исходной поверхности Γ в момент образования угловой точки на Γ_0; если $\gamma > \gamma_*$, то градиентная катастрофа возникает на том же луче, но еще до момента образования угловой точки на Γ_0.

В §5 рассматривается общий случай трехмерного истечения в вакуум, когда исходная поверхность отделяет вакуум от неоднородного движущегося газа. Здесь неодномерность задачи определяется как неодномерной геометрией исходной поверхности раздела, так и изменением значений газодинамических параметров вдоль нее. Решения задач о распаде разрыва и о непрерывном примыкании газа к вакууму построены в виде сходящихся рядов и доказано, что каждая частица на свободной поверхности некоторое время будет двигаться по своей прямой со своей постоянной скоростью $\mathbf{V}_* = \left[\mathbf{V}_0(\mathbf{x}) + \frac{2}{\gamma-1}c_0(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})\right]\Big|_{\mathbf{\Gamma}}$. Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный нормальный вектор поверхности Γ. Все результаты этого параграфа получены в предположении, что $\mathbf{V}_* \cdot \mathbf{n} \neq 0$, то есть вектор $\mathbf{V}_*$ не лежит в касательной плоскости к поверхности $\mathbf{\Gamma}$.

В §6 рассматривается случай трехмерного истечения в вакуум, когда вектор $\mathbf{V}_*$ лежит в касательной плоскости к поверхности Γ, но не принадлежит поверхности Γ. В этом случае с помощью преобразования Галилея вводится новая система координат, в которой начально-краевая задача сводится к задаче, рассмотренной в пятом параграфе. Детально исследован один частный случай таких течений, когда газовое тело в начальный момент времени является двумерным осесимметричным и начальные условия обеспечивают закрутку газа на свободной поверхности. Естественно, что возникновение подобных течений возможно только при специально подобранных начальных данных. Тем не менее, имеются содержательные примеры таких течений. Скажем, когда снаружи от осесимметричной поверхности находится газ, а внутри – вакуум, то такое течение можно использовать для приближенного моделирования нижней части закрученных потоков типа торнадо. Если снаружи от поверхности – вакуум, а внутри – газ, то полученное решение описывает головную часть закрученных струйных течений. С помощью сходящихся рядов построено решение начально-краевых задач и доказано, что свободная поверхность всегда движется от оси симметрии.

В §7 рассматривается случай трехмерного истечения в вакуум, когда поверхность Г является линейчатой и вектора $\mathbf{V}_*$ лежат на образующих этой поверхности. В этом случае доказано, что некоторое время свободная поверхность Γ_0 стоит на месте, то есть совпадает с Г, и частицы газа движутся вдоль образующих этой поверхности. Также доказано, что особенности в таких течениях возникают в двух ситуациях.

В первом случае бесконечные значения могут возникнуть у производных по переменной, изменяющейся вдоль образующих свободной поверхности (внутренней переменной поверхности Г). Этот момент времени совпадает с моментом возникновения особенностей у уравнений переноса и означает, что частицы газа, движущиеся вдоль Г, "набегают" одна на другую.

Во второй ситуации найдены соотношения между значениями параметров газа и функцией, задающей поверхность Г, при которых бесконечные значения возникают у производных по переменной, выводящей с поверхности Г. В этом случае особенности возникают у системы транспортных уравнений. Это означает, что происходит уплотнение среды примыкающей к свободной поверхности.

Исследование показало, что для струйных течений градиентные катастрофы на поверхности Γ_0 могут возникать по этим двум разным направлениям.

В §8 рассматривается общий случай трехмерного истечения в вакуум в условиях действия внешних массовых сил. С помощью специальной системы координат решения задач о распаде разрыва и о непрерывном примыкании газа к вакууму построены в виде сходящихся рядов и тем самым доказано, что область сходимости рядов содержит всю волну разрежения — от слабого разрыва до свободной поверхности включительно. Закон движения свободной поверхности в этом случае определяется как решение задачи Коши для заранее известной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава III (§§ 9 – 11) посвящена исследованию одномерных и многомерных течений идеального политропного газа в случае неаналитических начальных данных или негладкой начальной поверхности раздела газ-вакуум.

В §9 рассматривается двумерный разлет идеального политропного газа в вакуум в случае, когда исходная поверхность раздела имеет (рис. 1) угловую точку.

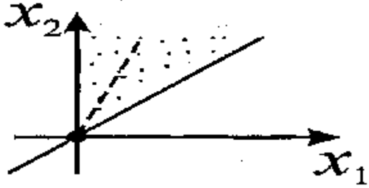

Рис. 1

В пространстве годографа в виде ряда строится двумерное решение, примыкающее к простой волне и являющееся решением одной характеристической задачи Коши стандартного вида. Доказывается, что область сходимости ряда в окрестности угловой точки носит секториальный характер и не дотягивается до свободной поверхности (рис. 2).

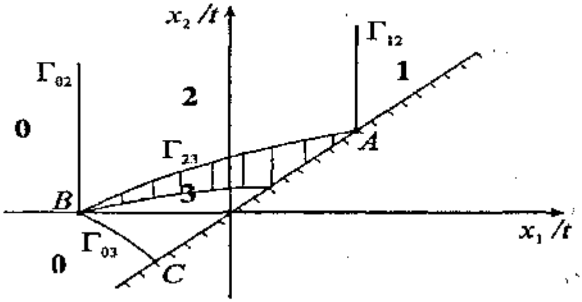

Рис. 2

В §10 рассматривается следующая задача. Пусть прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются непроницаемыми стенками. Идеальный политропный газ покоится в первой четверти, а в остальном пространстве – вакуум (рис. 3).

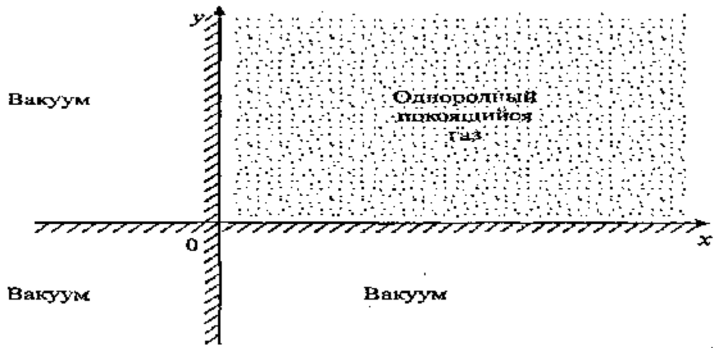

Рис. 3

В момент $t = 0$ стенка $x = 0$ мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум вдоль стенки $y = 0$. Возникшее в результате распада разрыва течение имеет следующую конфигурацию (рис. 4):

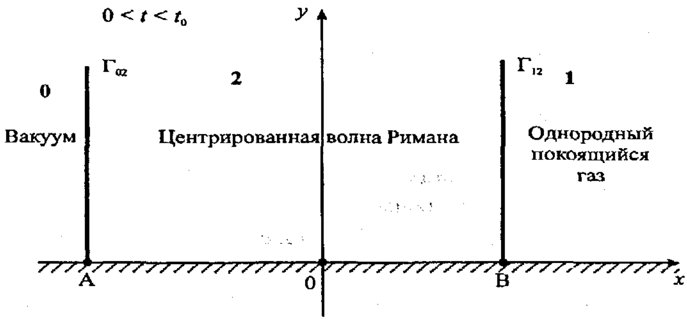

Рис. 4

в области **0** – вакуум; в области **1** – однородный покоящийся газ; в области **2** – простая центрированная волна Римана. Γ_{02} – прямая, отделяющая движущийся газ от вакуума (свободная поверхность), Γ_{12} – прямая, разделяющая движущийся и покоящийся газ (звуковая характеристика). В точках A, B терпят разрыв первые производные от газодинамических параметров.

В момент $t = t_0 > 0$ стенка $y = 0$ мгновенно разрушается и возникает сложная картина истечения в вакуум, составленная из одномерных и двумерных течений состыкованных между собой с помощью характеристик Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{24}, Γ_{25}, Γ_{35}, Γ_{45} (рис. 5):

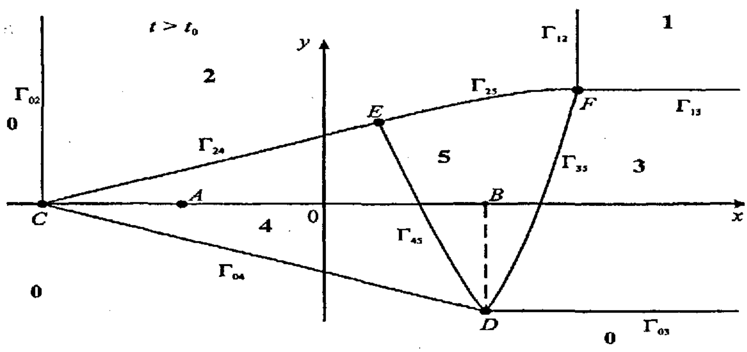

Рис. 5

в области **0** – вакуум; в области **1** – покоящийся газ; в областях **2** и **3** – простые волны; в области **4** – течение, возникшее в результате распада разрыва на отрезке $[A, B]$; в области **5** – течение, возникшее в окрестности точки B в силу того, что в момент $t = t_0$ производные от газодинамических параметров в точке B терпят разрыв. Свободная поверхность состоит из трех частей: Γ_{02}, Γ_{03}, Γ_{04} и имеет две угловые точки C и D. Решение задачи о распаде разрыва построено в виде характеристических рядов в области 4. Доказана сходимость этих рядов вплоть до угловой точки C на свободной поверхности. Также доказано, что поверхность слабого разрыва Γ_{24}, отделяющая искомое течение от простой волны, и свободная поверхность Γ_{04} являются прямыми. В виде сходящихся рядов построены характеристики Γ_{25}, Γ_{45}. Для течения в области 5 поставлена задача с данными на трех характеристиках: Γ_{25}, Γ_{35}, Γ_{45}. Однако для получившейся переопределенной задачи, имеющей в момент времени $t = t_0$ особенность, решение пока не построено.

В §11 рассматривается течение, возникшее в результате разрушения конической поверхности, по одну сторону от которой находился вакуум, а по другую газ. Решение задачи о распаде разрыва построено в виде степенных рядов. Доказана сходимость этих рядов во всей области течения – от слабого разрыва до свободной поверхности включительно. Также доказано существование этого решения вплоть до момента фокусировки слабого разрыва на ось симметрии. В физическом пространстве получено переразложение этого решения в окрестности оси симметрии.

В **Заключении** на основе полученных результатов сформулированы выводы.

Основные публикации автора по теме диссертации.

Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях:

1. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Двумерное истечение в вакуум // Точные и приближенные методы исследования задач механики сплошной среды. Труды ИММ УНЦ АН СССР.– Свердловск: УНЦ АН СССР.– 1983.– С. 3–15.
2. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум из состояния покоя // Численные методы механики сплошной среды.– 1983.– Т 14, № 4.– С. 58–73.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Истечение идеального газа в вакуум // Доклады АН СССР.– 1983.– Т. 273, № 4.– С. 817–820.
4. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Динамика сплошной среды.– 1984.– Вып. 65.– С. 56–74.
5. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение идеального газа в вакуум в случае линейчатой свободной поверхности. Свердловск: УЭМИИТ, 1984. – 28 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.1984.– № 2617–84.– С. 1–28.
6. Баутин С.П., Дерябин С.Л. О существовании аналитических решений задачи о разлете газа в вакуум при наличии угловой точки // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды. Труды ИММ УНЦ АН СССР.– Свердловск: УНЦ АН СССР.– 1985.– С. 3-14.

7. Дерябин С.Л. Отдельные задачи, возникающие при истечении газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды. Труды ИММ УНЦ АН СССР.– Свердловск: УНЦ АН СССР.– 1987.– С. 48–62.
8. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды.– 1987.– Вып. 83.– С. 60–71.
9. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Задача об истечении в вакуум нормального газа // Динамика сплошной среды.– 1993.– Вып. 107.– С. 26–38.
10. Дерябин С.Л.,Чуев Н.П. Сферически симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикладная математика и механика.– 1994.– Т.58.– Вып.2.– С.77–84.
11. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум. // Вычислительные технологии.– 2003.– Т.8, № 4.– С. 32–44.
12. Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум // Вычислительные технологии.– Т.9, Вестник КазНУ №3(42) (совместный выпуск).– 2004.– С. 167–175.
13. Дерябин С.Л. Начальная эволюция закрученных газовых объемов, примыкающих к вакууму // Вычислительные технологии.– 2005.– Т.10, № 1.– С. 21–36.
14. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум.– Новосибирск: Наука, 2005.– 390 с.

Работы, опубликованные в трудах всесоюзных, всероссийских и международных конференций и семинаров:

15. Bautin S.P., Deryabin S.L. The flowing of an ideal gas into vacuum // Free-boundary problems in continuum mechanics. Abstract.– Новосибирск: ИГ СО АН СССР.– 1991.– С. 17-18.
16. Дерябин С.Л. Одно двумерное течение, примыкающее к простой волне // Международная школа - семинар "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа САМГОП-94", Арзамас 16.– 1994.– С. 51.
17. Дерябин С.Л., Чуев Н.П. Одномерное истечение газа в вакуум в условиях самогравитации // Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тезисы докладов.– Пермь.– 2001.– С. 231.
18. Дерябин С.Л. Эволюция закрученных газовых тел в задачах об истечении газа в вакуум // 19-ая Всероссийская школа-семинар "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САПГОП-2002)", Снежинск.– 2002.– С. 24.

19. Дерябин С.Л. Исследование задач, возникающих при истечении идеального газа в вакуум // Всероссийская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения академика А.Ф. Сидорова "Актуальные проблемы прикладной математики и механики". Тезисы докладов. Екатеринбург: ИММ УрО РАН.– 2003.– С. 32–33.
20. Дерябин С.Л. Пространственное истечение идеального газа в вакуум// Международная конференция "VII Забабахинские научные чтения". Тезисы докладов.– Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ.– 2003.– С. 212.
21. Дерябин С.Л. Аналитическое исследование конических течений политропного газа в окрестности оси симметрии // Всероссийская конференция, приуроченная к 85-летию академика Л.В. Овсянникова "Новые математические модели механики сплошной среды: построение и изучение". Тезисы докладов.– Новосибирск: ИГ СО РАН.– 2004.– С. 59.
22. Дерябин С.Л. Многомерное истечение газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил или самогравитации с гладкой и не гладкой свободной поверхностью // XX Всероссийская школа-семинар "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САПГОП-2004)". Тезисы докладов.– Абрау-Дюрсо.– 2004.– С. 32–33.
23. Дерябин С.Л. Конические течения идеального газа, имеющие особенности на свободной поверхности и на поверхности слабого разрыва // Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". Тезисы докладов.– Новосибирск: ИГ СО РАН.– 2005.– С. 39–40.
24. Дерябин С.Л. Двумерное течение, примыкающее к вакууму с угловыми точками на свободной поверхности // VIII Международная конференция "Забабахинские научные чтения". Тезисы докладов.– Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ.– 2005.– С. 204–205.

Дерябин Сергей Львович

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТЕЧЕНИЯ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ВАКУУМ

05.13.18 – математичсское моделирование, численные методы
и комплексы программ

Подписано в печать 03.11.2005

Бумага писчая №1 Формат 60X90 1/16 Объем 1, 4 п. л.

Тираж 100 экз. Цена договорная Заказ 297

Уральский государственный университет путей сообщения
620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66