РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

На правах рукописи

ШКАТОВ Дмитрий Петрович

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ С НЕСТАНДАРТНЫМИ МОДАЛЬНОСТЯМИ

Специальность 09 00 07
Логика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата философских наук

Москва 2006

Работа выполнена на секторе логики Института Философии Российской Академии Наук

Научный руководитель	доктор философских наук МАРКИН В И
Официальные оппоненты·	доктор философских наук ЛЕДНИКОВ Е Е
	кандидат философских наук ЗАЙЦЕВ Д В.
Ведущая организация	Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра логики

Защита состоится «15» июня 2006 года в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 002 29 03 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора философских наук при Институте философии РАН

С текстом диссертации можно ознакомиться в библиотеке Института философии РАН

Автореферат разослан «12» мая 2006 г

Ученый секретарь
Диссертационного совета
кандидат философских наук Ф М Морозов

Общая характеристика работы

Настоящая диссертация посвящена исследованию модальных логик, языки которых содержат модальности, которые не были достаточно хорошо изучены в исследованиях по модальной логике и которые мы поэтому называем «нестандартными».

Актуальность темы. Хотя модальная логика—это давно появившаяся и к настоящему времени достаточно хорошо развитая область исследований и «стандартные» модальные логики были тщательно изучены, в недавнее время в литературе были сформулированы логики, модальности которых не были изучены исследователями модальных логик Достаточно часто эти «нестандартные» модальности появляются в результате попыток применить аппарат модальных логик к моделированию явлений, изучаемых в различных областях знания, иначе говоря, их рассмотрение мотивировано нуждами прикладной модальной логики, то есть той области логики, которая изучает логические системы, изначально мотивируемые рассмотрением феноменов, изучаемых в различных областях знания, не обязательно (но не исключая) философского Неудивительно, что прикладные исследования приводят к возникновению модальностей, не изученных в исследованиях, которые имели главным образом математическую мотивацию

В настоящей диссертации мы рассматриваем с различных точек зрения некоторые из модальных логик, которые в недавнем прошлом привлекли внимание исследователей, работающих на стыке прикладной и теоретической логики и которые не были достаточно изучены в традиционных исследованиях по модальной логике· интуиционистские модальные логики, логики с оператором конечной итерации $\Diamond$ и логики с экзистенциальной модальностью $\langle\#\rangle$

Первый класс логик, рассматриваемых в настоящей диссертации—это интуиционистские модальные логики, то есть модальные логики, немодальной основой которых является интуиционистская логика Хотя исследования интуиционистских (главным образом, не-модальных, но отчасти и модальных) логик, мотивированные проблемами из области оснований математики, имеют долгую и богатую историю, в 90-х годах интерес к интуиционистским модальным логикам резко возрос, так как оказалось, что они могут быть использованы для формального моделирования широкого класса явлений, изучаемых прикладными логиками, главным образов явлений из области теоретической компьютеристики В частности, значительный интерес к интуиционистским модальным логикам привлекли исследования Могги в области λ-исчислений с типами, пополненных конструкциями, называемыми монадами Логикам давно было известно, что существует соответствие между λ-исчислением с типами и интуиционистской модальной логикой через так называемый изоморфизм Карри-Ховарда, отображающий λ-термы в формулы интуиционистской логики С точки зрения прикладной логики это означает, что интуиционистская логика—это полезный инструмент для построения выводов в области формальной семантики функциональных языков программирования, которая обычно формулируется в терминах λ-исчисления с типами. Могги расширил λ-исчисление с типами, добавив к нему конструкции, названные им монадами, призванные моделировать те черты функциональных языков программирования (например, исключения), которые не могут быть смоделированы в «чистом» λ-исчислении. При попытке найти логический «напарник» такого расширенного λ-исчисления оказалось, что ему соответствует интуиционистский аналог логики S4, хорошо известной из области классических модальных логик Это открытие вызвало шквал работ, посвященных интуиционистской S4, ее теории доказательств, категорной и крипкевской семантикам. Помимо этого, интуиционистские модальные логики были использованы для моделирования неполной информации, систем коммуникации и методов проверки компьютерного оборудования С точки зрения упомянутых приложений, особый интерес представляет (исследуемая в настоящей диссертации) проблема разрешимости интуиционистских модальных логик, так как логики с неразрешимой проблемой выполнимости, хотя могут представлять некий теоретический интерес, практически совершенно непригодны

Второй класс логик, рассматриваемый в настоящей диссертации—это логики с оператором конечной итерации $\diamond^+$. Мы рассматриваем логики с $\diamondsuit$ с точки зрения, отличной от точки зрения, с которой мы рассматриваем интуиционистские модальные логики В то время как интуиционистские модальные логики, рассматриваемые в диссертации, определены семантически через наложение условий на отношения достижимости в крипкевских моделях, логики с $\diamondsuit$ рассматриваются как синтаксически определенный класс (нормальных модальных) логик, минимальный член которого мы называем Seg Изучение расширений Seg представляется актуальным с двух точек зрения: исторической и прикладной. Исторически, общее изучение логик с оператором Сегерберга является естественным продолжением предшествующих исследований в области модальной логики, которое началось в 1910-х годах с исследования отдельных мономодальных систем и развивалось в дальнейшем в двух главных направлениях. Во-первых, были сформулированы и изучены модальные логики в более сложных языках В 1950-х годах, А Прайор исследовал временные логики, имеющие две независимые модальности, в 1970-х годах, В Пратт начал исследование логик действий, модальности которых строятся из бесконечного набора базовых модальностей при помощи операторов, заимствованных из алгебры регулярных выражений, в том числе оператора конечной итерации—как позже выяснилось, это было только самым началом почти неостановимого размножения модальностей, которое имело место в 1980-х и 1990-х годах и которое продолжается до сих пор почти любое новое приложение модальных логик порождало новые, доселе неизученные модальности Во-вторых, в 1960-х годах, ввиду лавинообразного увеличения числа приложений модальной логики как в философии, так и за ее пределами, исследователи начали изучать не отдельные системы модальных логик, а целые классы таких систем нереалистично ограничивать наше внимание несколькими модальными системами в надежде на то, что прикладники найдут среди изученных нами систем то, что им нужно; более реалистично изучать классы модальных систем с тем, чтобы мы могли описать логику, требуемую в новом приложении на основе того (изученного нами) класса логик, к которому она принадлежит Таким образом, изучение классов модальных логик становится первостепенной проблемой Такой *мас-*

совый (или метаметатеоретический) подход к изучению модальных логик в настоящее время лучше всего разработан для простейшего случая—мономодальных логик Логики с более сложными модальностями изучались по-системно до середы 1990-х годов, когда Ф Вольтер стал применять массовый подход к изучению временных логик Следующим шагом было бы логично расширить такой подход на изучение логик с оператором конечной итерации $\diamond$, первый шаг в этом направлении предпринимается в настоящей диссертации С точки зрения практических приложений, изучение логик с $\diamond$ мотивировано тем, что понятие конечной итерации появляется в формальном моделировании очень широкого круга явлений Мы приведем только два примера В теоретической компьютеристике $\diamond$ моделирует повторное выполнение программ (например, в петлях), для формального описания программ компьютеристы-теоретики используют логику PDL, язык которой содержит $\diamond$ и которая строится на основе полимодального варианта логики K. Несмотря на то, что PDL и некоторые ее варианты хорошо изучены, никто не изучал, что происходит в случае добавления PDL-модальностей к произвольным моно- и полимодальным логикам Массовый подход к изучению логик программ расширил бы наше понимание логических свойств программ в контекстах, в которых мы хотели бы потребовать, чтобы базисные (или атомарные) программы обладали бы какими-то специальными свойствами (например, свойством Черча-Россера, которое постулируется в λ-исчислении, используемом для построения формальных семантик программ) Другая область, в которой понятие конечной итерации играет ключевую роль и в которой логическое моделирование является одним из основных методов исследования—это изучение знания в мульти-агентных системах, то есть в формальных моделях совокупности взаимодействующих познающих субъектов, в которых оператор конечная итерация используется для формального моделирования так называемого «общего знания», то есть знания о некотором факте, которое доступно всем познающим субъектам, наряду со знанием о самой этой доступности

Третья группа логик, рассматриваемых в настоящей диссертации,—это логики с экзистенциальной модальностью $\langle\#\rangle$, называнной нами так потому, что в семантике крипкевского типа формула $\langle\#\rangle\varphi$ означает, что *существует* некоторое (атомарное) отношение достижимости R_a такое, что формула φ истинна в точке, достижимой по R_a Эта модальность совсем недавно привлекла внимание логиков-прикладников в контексте логического моделирования полуструктурированных данных Полуструктурированными называют данные, которые имеют определенную структуру, но не настолько строгую, как базы данных; мотивирующий пример полуструктурированных данных—сеть Интернет Полуструктурированные данные обычно моделируются при помощи графов с отмеченными ребрами (то есть графов, в которых не только узлы, но и ребра имеют имена) Для рассуждения о полуструктурированных данных в литературе был предложен широкий круг формальных языков. Многие из этих языков оказались вариантами модальных языков (что неудивительно, поскольку графы могут быть естественным образом рассмотрены как крипкевские модели) В частности, Н Алешиной, С Демри и М де Райке для рассуждений о полуструктурированных была предложена модальная логика PDL^{path} Модальность $\langle\#\rangle$, одна из модальностей языка PDL^{path}, естественным образом возникает в контексте полуструктурированных данных (например, рассуждая о сети Интернет, мы часто хотим иметь возможность сказать в используемом нами формальном языке, что какая-то интернет-страница достижима из другой интернет-страницы по *какой-то ссылке*, и нам не важно, как эты ссылка обозначена на ссылающейся странице)

Степень разработанности проблемы. Поскольку интуиционистские модальные логики возникали главным образом в исследованиях по прикладной логике, где различные прикладные области порождают различные логические системы, это привело в возникновению огромного числа интуиционистских модальных логик, отличающихся между собой не только тем, как модальности взаимодействуют с немодальными связками, но и самими определениями модальных связок Эта ситуация резко отличается от ситуции, имеющей место в классической модальной логике, где все исследователи согласны в том, как должны определяться модальные связки Такой «разброс и шатание» означают, что доказательство любых достаточно общих результатов об интуиционистских модальных логиках является довольно-таки затруднительным В частности, нелегко сформулировать достаточно общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик До настоящего времени единственный метод обоснования разрешимости интуиционистских модальных логик, предложенный в литературе,—это погружение интуиционистских модальных логик с n модальностями в классические модальные логики (называемые классическими «напарниками» интуиционистских логик) с $n + 1$ модальностями, предложенное Ф Вольтером и М Захарьящевым Метод Вольтера и Захарьящева имеет строгое ограничение: он может быть использован для обоснования разрешимости только тех интуиционистских логик, разрешимость чьих классических напарников нам уже известна Общих методов доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик, не зависящих от известности нам разрешимости их классических напарников, в литературе предложено не было

Что касается второго класса логик, исследуемых в диссертации, класса расширений минимальной нормальной логики с оператором $\diamondsuit$, следует заметить, что несмотря на то, что сам оператор $\diamondsuit$ давно известен (он был введен в 1970-х годах В. Праттом) и аксиоматически охарактеризован (К. Сегербергом), исследованием класса расширений минимальной нормальной логики с $\diamondsuit$ до настоящего времени никто не занимался

Что касается логик с экзистенциальной модальностью $\langle\#\rangle$, то модальность $\langle\#\rangle$ привлекла внимание логиков совсем недавно, и к настоящему времени единственной работой, посвященной логикам с $\langle\#\rangle$, является статья Н Алешиной, С Демри и М де Райке, в которой семантически определяется и изучается логика PDL^{path}. Важно отметить, что для практических применений PDL^{path}, для которых она была предложена (рассуждения о полуструктурированных данных), существенно важно наличие дедуктивной системы, позволяющей обосновать те (и только те) выводы, которые законны в PDL^{path}, однако, в настоящее время работы, посвященные аксиоматизации PDL^{path}, в литературе отсутствуют

Цели и задачи исследования Целью настоящей диссертации было решение следующих открытых проблем в области модальных логик с нестандартными модальностями

- Идентификация *разрешимого* гардидного фрагмента логики первого или более высокого порядка, включающего образ достаточно широкого класса интуиционистских модальных логик при некотором обобщении стандартного перевода классической модальной логики в классическую первопорядковую логику, и таким образом *пригодного для доказательства разрешимости широкого класса интуиционистских модальных логик*

- Прояснение того, как выглядит решетка нормальных модальных логик с двумя модальностями оператором возможности $\Diamond$ и оператором конечной итерации $\Diamond^{*}$

- Построение непротиворечивой и полной аксиоматизации логики PDL^{path} и ряда связанных с ней логик.

Научная новизна работы. В диссертации впервые выполнены следующие задачи:

- Впервые в русскоязычной литературе изложен взгляд на взаимоотношение классической пропозициональной модальной логики и классической первопорядковой логики, лежащий в основе построения гардидных фрагментов классических логик первого и более высокого порядков

- Построена альтернативная семантика базисного гардидного фрагмента первопорядковой логики и доказана ее адекватность стандартной первопорядковой семантике

- Приведено теоретико-модельное доказательство разрешимости базисного гардидного фрагмента первопорядковой логики методом мозаик

- Впервые в русскоязычной литературе сделан обзор основных результатов области гардидных фрагментов

- Доказано обобщение результата Ганцингера, Мейера и Винеса о разрешимости двух-переменного монадического гардидного фрагмента первопорядковой логики GF^2_{mon} с условиями замкнутости, выразимыми в монадической второпорядковой логике, наложенными на отношения, обозначенные предикатными параметрами GF^2_{mon}-формул, на фрагмент, в котором на отношения, обозначенные предикатными параметрами GF^2_{mon}-формул, может быть наложено более одного условия

- Разработан новый метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик через погружение в GF^2_{mon}, в котором на отношения, обозначенные предикатными параметрами, наложены условия замкнутости, выразимые в монадической второпорядковой логике, и показано, что этот метод может быть использован для доказательства разрешимости широкого класса известных из литературы интуиционистских модальных логик

- Доказан аналог теоремы Макинсона для логик с оператором конечной итерации $\Diamond$.

- Доказано, что логики с $\Diamond$ имеют конечные нестандартные модели.

- Доказано, что добавление аксиом, характеризующих $\Diamond$, к логике S4 дает систему, эквивалентную S4

- Доказано, что добавление аксиом, характкризующих $\Diamond$, к произвольной мономодальной логике Λ дает консервативное расширение Λ.

- Сформулирован стандартный перевод формул логик с $\langle\#\rangle$ в гардидный фрагмент логики с оператором наименьшей неподвижной точки

- Построены аксиоматизации гильбертовского типа минимальной нормальной логики с экзистенциальной модальностью $\langle\#\rangle$, ее детерминистичекого расширения, логики PDL^{path} и одного из ее вариантов; доказана их семантическая адекватность и полнота

Методологическая основа исследования. В процессе диссертационного исследования использовались различные методы доказательства метатеорем, известные из литературы по символической логике В частности,

- разрешимость двух-переменного монадического гардидного фрагмента первопорядковой логики GF^2_{mon} с условиями замкнутости, выразимыми в монадической второпорядковой логике, доказана путем сведения проблемы выполнимости формул этого фрагмента к проблеме выполнимости формул теории SkS (монадической второпорядковой теории деревьев с постоянным фактором ветвления k),
- разрешимость интуиционистских модальных логик доказывается погружением в упомянутый выше гардидный фрагмент,
- аналог теоремы Макинсона для логик с $\diamond$ доказывается через преобразование канонических моделей этих логик;
- полнота логик с оператором $\langle\#\rangle$ доказывается через построение конечных канонических моделей для этих логик

Основные положения, выносимые на защиту. В ходе проведенной работы были получены следующие результаты.

- Доказано обобщение результата Ганцингера, Мейера и Винеса о разрешимости двух-переменного монадического гардидного фрагмента первопорядковой логики GF^2_{mon} с условиями замкнутости, выразимыми в монадической второпорядковой логике, наложенными на отношения, обозначенные предикатными параметрами GF^2_{mon}-формул, на фрагмент, в котором на отношения, обозначенные предикатными параметрами GF^2_{mon}-формул, может быть наложено более одного условия

- Разработан новый метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик через погружение в GF^2_{mon}, в котором на отношения, обозначенные предикатными параметрами, наложены условия замкнутости, выразимые в монадической второпорядковой логике, и показано, что этот метод может быть использован для доказательства разрешимости широкого класса известных из литературы интуиционистских модальных логик

- Доказан аналог теоремы Макинсона для логик с оператором конечной итерации $\diamondsuit$

- Сформулирован стандартный перевод формул логик с $\langle\#\rangle$ в гардидный фрагмент логики с оператором наименьшей неподвижной точки и тем самым доказана разрешимость логик с $\langle\#\rangle$, семантически определимых при помощи гардидных формул

- Построены аксиоматизации гильбертовского типа минимальной нормальной логики с экзистенциальной модальностью $\langle\#\rangle$, ее детерминистичекого расширения, логики PDL^{path} и одного из ее вариантов; доказана их семантическая адекватность и полнота

Практическая значимость работы. Результаты данного диссертационного исследования могут иметь применение в следующих областях прикладной логики.

- Предложенный нами общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик может быть использован для доказательства разрешимости конкретных систем интуиционистской модальной логики.

- Более того, наш метод доказательства разрешимости может быть положен в основу создания автоматических программ проверки интуиционистских модальных формул на выполнимость, так как наш метод сводит проблему выполнимости этих формул к выполнимости формул SkS, для котрой имеются довольно-таки эффективные программы проверки на выполнимость

- Построенные нами аксиоматизации логик с $\langle\#\rangle$ могут лечь в основу написания программ автоматического поиска доказательств в этих логиках

Кроме того, материал диссертации может быть использован при разработке спецкурсов по модальной логике для специализирующихся по кафедрам логики философских факультетов Следует отметить, что несмотря на то, что логики, рассматриваемые в настоящей диссертации, были сформулированы в исследованиях по прикладной логике, как мы неоднократо подчеркиваем в основном тексте диссертации, эти логики представляют непосредственный интерес для философского логика Так, интуиционистские модальные логики представляют непосредственный интерес для тех логиков-философов, которые полагают, что основу систем формальной логики должна составлять не классическая, а интуиционистская концепция истинности Проект построения и исследования интуиционистских систем пока не продвинулся далеко за пределы базовой интуиционистской логики, и исследование интуиционистских модальных логик является естественным следующим шагом в этом направлении Логики с оператором конечной итерации представляют непосредственный интерес для исследователей в областях логики действий и логики знаний, в которых оператор конечной итерации играет ключевую роль Наконец, логики с экзистенциальной модальностью также представлоят непосредственный интерес для исследователей логик действий и логик знаний, так как они дают нам возможность рассуждать о знаниях, которыми обладают какие-то, возможно неизвестные, субъекты знания и о высказываниях, истинностный статус которых может быть изменен при помощи какого-то, возможно неизвестного нам, действия Представляется, что на настоящем этапе развития логики прикладная логика выполняет для философской логики ту же функцию, которую исследования по основаниям математики выполняли в первой половине 20-го века ставя перед исследователями конкретные, осязаемые проблемы, прикладная логика дает толчок развитию логического аппарата, который затем, вторично, используется логиками, анализирующими философские проблемы

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования были представлены на конференции «Methoda for Modalities 4», проводившейся в Нанси в 2004 г

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения

Основное содержание работы

Введение диссертации посвящено обоснованию актуальности темы, выявлению степени ее разработанности, формулированию целей и задач исследования, раскрытию научной новизны работы.

Первая глава диссертации называется «Модальная логика и гардидные фрагменты» Это глава, состоящяя из четырех разделов, содержит сведения о пропозициональных модальных логиках и гардидных фрагментах логик первого и более высоких порядков, на которые мы опираемся в последующих главах диссертации.

В *первом разделе*—«Модальная логика и первопорядковая логика» —дается определение пропозициональных моно- и полимодальных логик и классической первопорядковой логики

Во *втором разделе*—«Модальная логика в сравнении с первопорядковой логикой»—описывается тот взляд на взаимоотношение между пропозициональной модальной и классической первопорядкой логикой, который привел к появлению гардидных фрагментов.

В течение долгого времени пропозициональная модальная логика и классическая первопорядковая логика рассматривались как расширения классической первопорядковой логики в совершенно различных направлениях первая, давая нам возможность рассуждать о возможных и необходимых фактах, второая—об индивидах, их свойствах и отношениях между индивидами. При таком взляде на взаимоотношение между этими логиками, они являются никак не связанными областями исследований В 1980-х годах, в работах Й ван Бентема, пропозициональная модальная и классическая первопорядковая логики стали рассматриваться как альтернативные языки описания реляционных структур, так как было замечено, что модели обоих логик представляют собой реляционные структуры Ван Бентемом был сформулирован так называемый «стандартный перевод», отображающий модальные формулы в первопорядковые, что показало, что первопорядковый язык является не беднее пропозиционального модального языка

Определение 1. Пусть $\mathcal{ML}$ - это пропозициональный модальный язык и $\mathcal{FO}$—это первопорядковый язык Определим, при помощи взаимной индукции две функции, τ_x и τ_y отображающие формулы $\mathcal{ML}$ в формулы $\mathcal{FO}$ τ_x определяется следующими условиями

- $\tau_x(p_i) = P_i(x)$ для каждого p_i,
- $\tau_x(\neg\varphi) = \neg\tau_x(\varphi))$,
- $\tau_x(\varphi \vee \psi) = \tau_x(\varphi) \vee \tau_x(\psi)$,
- $\tau_x(\Diamond\varphi) = \exists y(R(x, y) \wedge \tau_y(\varphi))$

τ_y определяется аналогично, с заменой x на y и y на x Наконец, будем называть стандартным переводом формулы $\varphi \in \mathcal{ML}$ формулу $\tau_x(\varphi)$

Ван Бентемом, в соавторстве с Немети и Андрекой, также было доказано, что первопорядковые переводы модальных формул («модальный фрагмент первопорядковой логики») являются собственным подмножеством множества первопорядковых формул

В *третьем разделе*— «Первопорядковые гардидные логики» описываются гардидные фрагменты первопорядковой логики

Гардидные фрагменты возникли в результате попытки получить более богатые, чем модальный фрагмент, фрагменты первопорядковой логики, сохраняющие «хорошие свойства» модального фрагмента, прежде всего разрешимость Базисный гардидный фрагмент обобщает «модальную квантификацию», то есть квантификацию, допутимую в модальном фрагменте: $\exists y(R(x, y) \wedge \tau_y(\varphi))$ Формулы базисного гардидного фрагмента строятся из атомарных формул при помощи булевых связок и квантификации следующего вида: если ρ—это атом, φ—формула гардидного фрагмента, и $\overline{x} \subseteq FV(\varphi) \subseteq FV(\rho)$, то

$\exists\bar{x}(\rho \wedge \varphi)$ тоже является формулой гардидного фрагмента ($\bar{x}$ обозначает упорядоченную последовательность индивидных переменных, и $FV(\psi)$ обозначает множество свободных переменных формулы ψ; формула ρ называется гардом формулы $\exists\bar{x}(\rho \wedge \varphi)$)

В разделе строится альтернативная семантика базисного гардидного фрагмента при помощи моделей с органиченным множеством допустимых приписываний и доказывается, что построенная семантика адекватна стандартной первопорядковой семантике гардидных формул в том смысле, что всякая гардидная формула φ общезначима в классе альтернативных моделей, если и только если она общезначима в классе стандартных первопорядковых моделей Также в разделе приводится теоретико-модельное доказательство разрешимости базисного гардидного фрагмента, которое является аналогом алгебраического доказательства ван Бентема, Андреки и Немети Раздел равершается обзором более богатых, чем базисный гардидный фрагмент, гардидных фрагментов первопорядковой логики

В *четвертом разделе*— «Гардидные логики более высоких порядков логики»—описываются гардидные фрагменты логик более высоких порядков

Основное внимание в разделе уделяется гардидному фрагменту логики с оператором наименьшей неподвижной точки, исследованной в работах Э Грэделя и И Валукевича В частности, приводится полученный этими авторами результат о разрешимости гардидного фрагмента с оператором наименьшей неподвижной точки

Во второй главе— «Интуиционистские модальные логики»— описывается построенный нами общий метод доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик через погружение в разрешимый гардидный фрагмент классической первопорядковой логики Глава состоит из семи разделов

В *первом разделе* обосновыется необходимость построения нового общего метода доказательства разрешимости интуиционистских модальных логик Указывается, что единственный общий метод доказательства разрешимости этих логик, предложенный Ф Вольтером и М В Захарьящевый, обладает очень важным ограничением обосновывая разрешимость интуиционистских модальных логик с n модальностями через погружение в классические модальные логики с $n+1$ модальностью, этот метод может быть использован для доказательства разрешимости тех интуиционистских логик, разрешимость чьих классических «напарников» нам уже известна Мы предлагаем метод доказательства разрешимости, не обладающий этим ограничением Мы погружаем интуиционистские модальные логики в двух-переменный монадический гардидный фрагмент первопорядковой логики, в котором на предикатные параметры могут накладываться условия особого вида

Во *втором разделе* мы определяем двух-переменный монадический гардидный фрагмент первопорядковой логики

Определение 2. Двух-переменным монадическим гардидным фрагментом GF^2_{mon} первопорядковой логики будем называть наименьшее подмножество гардидного фрагмента первопорядковой логики GF, содержащее формулы φ такие, что (i) φ имеет не более двух переменных (свободных или связанных), и (ii) все не-унарные предикатные параметры φ встречаются в гардах

В *третьем разделе* мы определяем условия замкнутости, которые могут накладываться на предикатные параметры формул GF^2_{mon} без потери разрешимости

Определение 3. Пусть W—непустое множество Будем называть унарную функцию C на 2^W простым оператором замыкания, если для всех $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subseteq W$ имеют место следующие условия.

1 $\mathcal{P} \subseteq C(\mathcal{P})$ (C растет),

2 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ влечет $C(\mathcal{P}) \subseteq C(\mathcal{P}')$ (C монотонен)

3 $C(\mathcal{P}) = C(C(\mathcal{P}))$ (C идемпотентен)

Будем называть $n+1$-местную функцию C на 2^W параметризованным оператором замыкания, если $C(\mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_n, -)$ является простым оператором замыкания для любых $\mathcal{P}_1, \quad , \mathcal{P}_n \subseteq W$ Мы будем обозначать при помощи $C^{\mathcal{P}_1 \quad \mathcal{P}_r}$ операторы замыкания параметризованные отношениями $\mathcal{P}_1 \quad , \mathcal{P}_n$

Определение 4. Будем называть условие наложенное на отношение $\mathcal{P}$, простым условием замкнутости, если оно может быть выражено в виде $C(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ где C простой оператор замыкания

Будем называть условие наложенное на отношение $\mathcal{P}$, параметризованным условием замкнутости если оно может быть выражено в виде $C^{\mathcal{P}_1 \quad \mathcal{P}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, где $C^{\mathcal{P}_1, \quad ,\mathcal{P}_n}$—параметризованный оператор замыкания

Определение 5. Пусть S конечное множество отношений, C—множество условий замкнутости наложенных на эти отношения и C($\mathcal{P}$)—все условия замкнутости из C, наложенные на отношение $\mathcal{P}$ из S Будем называть C ацикличным, если имеется такое упорядочивание $\mathcal{P}_1 \quad \mathcal{P}_n$ множества S что C($\mathcal{P}_{i+1}$) не имеет параметров, отличных от $\mathcal{P}_1 \quad , \mathcal{P}_i$

Определение 6. Будем называть оператор замыкания $C^{\mathcal{P}_1 \quad \mathcal{P}_m}$ на n-местных отношениях mso-определимым, если существует монадическая второпорядковая формула $\overline{C_P^{P_1 \quad P_m}}$, содержащая предикатные параметры $P_1, \quad , P_m$ и P, такая, что для любой модели $\mathcal{M}$ и любой n-местной формулы (то есть, формулы с n свободными переменными) φ имеет место

$$C^{\mathcal{P}_1 \quad \mathcal{P}_m}(\|\varphi\|^{\mathcal{M}}) = \|\overline{C_P^{P_1 \quad ,P_m}}(\varphi/P))\|^{\mathcal{M}}$$

Раздел завершается доказательством того, что двух-переменный монадический гардидный фрагмент GF^2_{mon}, на предикатные параметры которого наложено ациклическое множество mso-определимых условий замкнутости, разрешим

Теорема 1. Пусть $\varphi \in G\Gamma^2_{mon}$ и C—ацикличное множество mso-определимых условий замкнутости, наложенных на отношения из φ, такое, что на каждое отношениене наложено не более одного условия замкнутости Проблема выполнимости φ в модели, удовлетворяющей все условия из C, разрешима

В *четвертом разделе* описываются интуиционистские модальные логики В частности, мы обращаем внимание на то, что в отличие от ситуации с классическими модальными логиками, в литературе по интуиционистским модальным логикам нет согласия не только о том, как модальности должны взаимодействовать с немодальными связками, но и об определении модальностей в семантиках крипкевского типа различные авторы постулируют различные уловия истинности для модальностей интуиционистских логик Мы указываем, что такое отсутствие согласия приводит к тому, что доказательство любых общих результатов для интуиционистских модальных логик является затруднительным

В *пятом разделе* мы показываем, что все интуиционистские модальные логики, описанные в четвертом разделе, могут быть погружены в двух-переменный монадический фрагмент GF^2_{mon}

В *шестом разделе* мы доказываем следующую теорему

Теорема 2. Пусть M—класс интуиционистских модальных моделей, определенных при помощи ацикличного множества mso-определимых условий замкнутости, наложенных на $\mathcal{R}$ $\mathcal{R}_\Box$ и $\mathcal{R}_\Diamond$, таким образом что не более чем одно условие замкнутости соответствует каждому из этих отношений, и пусть φ—это интуиционистская модальная формула Тогда, проблема выполнимости φ в M разрешима

В *седьмом разделе* мы приводим примеры того, как теорема 2 может быть использована для доказательства разрешимости отдельных систем интуиционистской модальной логики.

В третьей главе— «Логики с оператором Сегерберга»—исследуется решетка логик, содержащих два модальных оператора· обычный оператор возможности $\Diamond$ и оператор конечной итерации, или оператор Сегерберга, $\Diamond^{*}$ Глава состоит из пяти разделов

В *первом разделе* обосновывается актуальность исследования логик с оператором Сегерберга. Указывается, что такое исследование является естественным развитием предыдущих исследований в области модальных логик

Во *втором разделе* определяется язык исследуемых в главе логик и формулируется его семантика.

В *третьем разделе* приводся сведения о нормальных модальных логиках, используемые в последующих разделах третьей главы и в четвертой главе диссертации

В *четвертом разделе* формулируется логика Seg, являющаяся минимальным элементом решетки логик, исследуемых в третьей главе диссертации

Определение 7 $\mathbf{Seg} = \mathbf{K}^* \oplus \{\boxdot\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge \Box\boxdot\varphi,\ \varphi \wedge \boxdot(\varphi \to \Box\varphi) \to \boxdot\varphi\}$

Также доказывается, что логика Seg имеет конечные нестандартные модели

В *пятом разделе* доказывается ряд результатов, проясняющих конфигурацию решетки расширений Seg

Теорема 3. Пусть Λ– нормальная модальная логики в мономодальном языке $\mathcal{ML}$ и пусть $\Lambda^* = \Lambda \oplus Seg$ Тогда, Λ^* является консервативным расширением Λ

Теорема 4. $\mathbf{Seg} \oplus \mathbf{S4} - \mathbf{S4} \oplus \Box\varphi \leftrightarrow \boxdot\varphi$

Теорема 5 (Аналог теоремы Макинсона). Пусть Λ—это непротиворечивое расширение Seg Тогда, или $\Lambda \subseteq \Lambda^{irref}$ или $\Lambda \subseteq \Lambda^{ref}$

В четвертой главе – «Логики с экзистенциальной модальностью»—строятся аксиоматизации и доказывается полнота ряда логик, языки которых содержат модальный оператор $\langle\#\rangle$, имеющий следующее условие истинности в крипкевских моделях: $\mathcal{R}_\# = \bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$, где $\bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ является объединением всех атомарных отношений достижимости модели Глава состоит из двух разделов.

В *первом разделе* строится аксиоматизация минимальной нормальной логики с оператором $\langle\#\rangle$, которую мы называем $\mathbf{K}_\#$(ее язык обозначается при помощи $\mathcal{L}\#$), эта аксиоматизация выглядит следующим образом (π обозначает либо произвольный атомарный модальный индекс i либо $\#$)

Схемы аксиом

(A0) Все классические тавтологии,

(K) $[\pi](\varphi \to \psi) \to ([\pi]\varphi \to [\pi]\psi)$,

(ER) $\langle \imath \rangle \varphi \to \langle \# \rangle \varphi$

Правила вывода:

(MP) Из $\varphi \to \psi$ и φ можно вывести ψ,

(N) Из φ можно вывести $[\pi]\varphi$;

(EL) Из $\langle \imath \rangle \varphi \to \psi$ можно вывести $\langle \# \rangle \varphi \to \psi$, при условии что $\imath$ не встречается в ψ.

Также строится аксиоматизация детерминистического расширения $\mathbf{K}_{\#}$, которое мы называем $\mathbf{DK}_{\#}$ Аксиоматизация $\mathbf{DK}_{\#}$ получается из приведенной выше аксиоматизации $\mathbf{K}_{\#}$ добавлением схемы аксиом

(F) $\langle \imath \rangle \varphi \to [\imath]\varphi$

Доказываются следующие теоремы

Теорема 6. $\mathbf{K}_{\#}$ непротиворечива и слабо полна по отношению к классу всех $\mathcal{L}\#$-шкал

Теорема 7. $\mathbf{DK}_{\#}$ непротиворечива и слабо полна по отношению к классу детерминистических $\mathcal{L}\#$-шкал

В *втором разделе* строится аксиоматизация логики PDL^{path}, которая представляет собой расширение хорошо известной логики PDL при помощи оператора обращения, оператора $\langle \# \rangle$, модальной константы тождества id и номинала (пропозиционального параметра, истинного в точности в одной точке крипкевской модели) r Схемы аксиом PDL^{path} логично разделить на четыре части Первая часть описывает поведение пропозициональных связок и стандартных модальных операторов $\langle \pi \rangle$ и $[\pi]$.

(A0) Все классические тавтологии,

(K) $[\pi](\varphi \to \psi) \to ([\pi]\varphi \to [\pi]\psi)$;

(A1) $\langle \pi \rangle \varphi \leftrightarrow \neg[\pi]\neg\varphi$

Вторая часть описывает свойства сложных модальных операторов:

(A2) $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \varphi \leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \varphi$,

(A3) $\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \varphi \leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \varphi \vee \langle \pi_2 \rangle \varphi$,

(A4) $\langle \pi^* \rangle \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \langle \pi \rangle \langle \pi^* \rangle \varphi$;

(A5) $[\pi^*](\varphi \to [\pi]\varphi) \to (\varphi \to [\pi^*]\varphi)$;

(A6) $\varphi \to [\pi] \langle \bar{\pi} \rangle \varphi$;

(A7) $\varphi \to [\bar{\pi}] \langle \pi \rangle \varphi$,

(A8) $\varphi \leftrightarrow \langle id \rangle \varphi$,

(ER) $\langle i \rangle \varphi \to \langle \# \rangle \varphi$

Третья часть описывает свойства номинала r (для этой цели в язык вводится модальный оператор $@_r$, известный из области гибридных логик):

(A9) $@_r(\varphi \to \psi) \to (@_r\varphi \to @_r\psi)$,

(A10) $@_r\varphi \leftrightarrow \neg @_r \neg\varphi$,

(A11) $r \wedge \varphi \to @_r\varphi$,

(A12) $@_r r$,

(A13) $\langle \pi \rangle @_r\varphi \to @_r\varphi$.

Наконец, нижеследующая аксиома соответствует условию связанности шкал, на которых интерпретируется PDL^{path} (условие требующее, что для любых $w, v \in W$, существует последовательность точек $u_1, \ldots, u_n$ такая, что (1) $w = u_1$, (2) $v = u_n$, и (3) для всякого $1 \leqslant i \leqslant n-1$, имеет место следующее: или, для некоторого $i \in I$, $u_i \mathcal{R}_i u_{i+1}$, или, для некоторого $i \in I$, $u_{i+1} \mathcal{R}_i u_i$)

(A14) $\langle (\# \cup \bar{\#})^* \rangle r$

Правила вывода PDL^{path}

(MP) Из $\varphi \to \psi$ и φ выводима ψ;

(N) Из φ выводима $[\pi]\varphi$,

(NN) Из φ выводима $@_r\varphi$,

(EL) Из $\langle \imath \rangle\varphi \to \psi$ выводима $\langle \# \rangle\varphi \to \psi$, при условии, что $\imath$ не встречается в ψ

Доказыватся следующие теоремы

Теорема 8. PDL^{path} непротиворечива и слабо полна по отношению к классу всех PDL^{path}-шкал

Теорема 9. PDL^{path} без аксиомы (A14) непротиворечива и слабо полна по отношению к классу всех не обязательно связанных PDL^{path}-шкал

Также в разделе определяется перевод формул PDL^{path} в гардидный фрагмент логики с оператором неподвижной точки Мы добавляем к языку PDL^{path} бесконечное множество пропозициональных параметров X_1 X_n (мы называем такой расширенный язык $\mathcal{L}_X(\mathsf{PDL}^{path})$) и определяем перевод для формул $\mathcal{L}_X(\mathsf{PDL}^{path})$

Определение 8. Определим при помощи взаимной индукции, два семейства переводов $\{\tau_x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\tau_y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, отображающие формулы языка $\mathcal{L}_X(\mathsf{PDL}^{path})$ в формулы языка с оператором наименьшей неподвижной точки **FO**(LFP) τ_x^n определяется следующими равенствами

- $\tau_x^n(r) = P(x)$,
- $\tau_x^n(X_\imath) = X_\imath(x)$,
- $\tau_x^n(\neg\varphi) = \neg\tau_x^n(\varphi)$,
- $\tau_x^n(\varphi \vee \psi) = \tau_x^n(\varphi) \vee \tau_x^n(\psi)$,
- $\tau_x^n(\langle \imath \rangle \varphi) = \exists y(R(a_\imath, x, y) \wedge \tau_y^n(\varphi))$, для каждого $\imath$,

- $\tau_x^n(\langle \# \rangle \varphi) = \exists z \exists y (R(z\ x\ y) \wedge \tau_y^n(\varphi))$
- $\tau_x^n(\langle \bar{i} \rangle \varphi) = \exists y (R(a_i\ y\ x) \wedge \tau_y^n \varphi)$, для каждого i,
- $\tau_x^n(\langle \overline{\#} \rangle \varphi) = \exists z \exists y (R(z\ y\ x) \wedge \tau_y^n(\varphi)$,
- $\tau_x^n(\langle \pi_1 \circ \pi_2 \rangle \varphi) = \tau_x^n(\langle \pi_1 \rangle \langle \pi_2 \rangle \varphi)$,
- $\tau_x^n(\langle \pi_1 \cup \pi_2 \rangle \varphi) = \tau_x^n(\langle \pi_1 \rangle \varphi) \vee \tau_x^n(\langle \pi_2 \rangle \varphi)$,
- $\tau_x^n(\langle \pi^* \rangle \varphi) = [LFP\ X_n\, y\, \tau_y^{n+1}(\varphi \vee \langle \pi \rangle X_n)](x)$

τ_y^n определяется аналогично, заменой x на y и y на x в предшествующих равенствах Наконец будем называть стандартным переводом PDL^{path}-формулы φ формулу $\tau_x^0(\varphi)$

Сформулированный перевод дает нам следующую теорему

Теорема 10. PDL^{path} и все ее расширения, определимые семантически при помощи μGF-формул разрешимы

В заключении подводятся итоги проделанной работы и намечаются перспективы дальнейших исследований

Результаты диссертационной работы нашли отражение в следующих публикациях автора:

[1] *Alechina N, Shkatov D* On intuitionistic modal logics // Proceedings of «Methonds for modalities 4» Nanci, 2004

[2] *Шкатов Д П.* Аналог теоремы Макинсона для нормальных модальных логик с оператором Сегерберга // Логические исследования, №11. М , «Наука», 2004

[3] *Alechina. N, Shkatov D* A general method for proving decidability of intuitionistic modal logics // Journal of Applied Logic, 2005

[4] *Алешина Н А , Шкатов Д П* О модальных логиках с экзистенциальной модальностью // Логическик исследования, №12 М., «Наука», 2005

Шкатов Дмитрий Петрович

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата филосовских наук

Подписано в печать 2 05 2006 г Формат 60x90, 1/16
Объем 1,5 п л Тираж 100 экз Заказ № 520

Отпечатано в ООО "Фирма Блок"
107140, г Москва, ул Краснопрудная, вл 13 т 264-30-73
www.blok01centre.narod.ru
Изготовление брошюр, авторефератов, печать и переплет диссертации

2006 A
10613

№ 1 0 6 1 3