УДК 5174-518.87 На правах рукописи

ПОТАПОВА ЗИНАИДА ЕВГЕНЬЕВНА

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск-2004

Работа выполнена в Красноярском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Мысливец Симона Глебовна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Половинкин Владимир Ильич

кандидат физико-математических наук,
доцент
Лейнартас Евгений Константинович

Ведущая организация Институт программных систем РАН
г. Переславль-Залесский

Защита состоится "01" июля 2004 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета К 212.098.03 в Красноярском государственном техническом университете по адресу 660074,т. Красноярск, ул. Киренского, 26.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Красноярского государственного технического университета.

Автореферат разослан "18" мая 2004 г.
Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук К. В. Сафонов

1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы

Формула многомерного логарифмического вычета хорошо известна в теории функций многих комплексных переменных. Она дает интегральное представление суммы значений голоморфной функции в нулях некоторой системы голоморфных функций, заданных в областях пространства C" Интеграл в этой формуле должен быть вычислен по циклам (остовам аналитических полиэдров) действительной размерности п. Для достаточно широких классов алгебраических отображений известны формулы вычисления данного интеграла через коэффициенты полиномов, входящих в систему. Но эти формулы настолько сложны, что практически (без разработки алгоритмов вычисления) их невозможно применить даже для простых систем. Тем более, что часто в системы входят параметры.

Первые попытки в создании таких алгоритмов (и их компьютерная реализация) для систем с выделенной главной.частью, треугольных систем были даны в работах В.И.Быкова, А.М.Кытманова, М.З.Лазмана, Т.А.Осетровой. В данных работах были рассмотрены применение формулы многомерного логарифмического вычета к исключению неизвестных из систем алгебраических уравнений. Этот модифицированный метод исключения неизвестных, предложенный Л.А.Айзенбергом, был затем развит в работах В.И.Быкова, А.М.Кытманова, М.З.Лазмана, С.Г. Мысливец, А.П.Южакова, А.К.Циха, Г.С.Яблонского, Т.А.Осетровой. Но для невырожденных систем алгебраических уравнений (практически самых общих алгебраических систем) такие разработки отсутствовали.

Тематика диссертации также связана с активно развивающимся в последнее время новым направлением в математике — компьютерной алгеброй многочленов, лежащей на стыке алгебры, математического анализа и программирования. Многие нелинейные задачи в приложениях характеризуются множественностью стационарных состояний. Эти запросы инициируют появление новых теоретических результатов в области анализа систем нелинейных алгебраических уравнений. Внедрение в практику научных исследований различных систем аналитических преобразований на. ЭВМ сделало работоспособными достаточно сложные алгоритмы теории исключения.

Нелинейные системы алгебраических уравнений возникают в различных областях знания. В частности, в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам компьютерной алгебры многочленов: построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в разных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы, построения систем треугольного вида, эквивалентных данной системе. Такие вопросы, естественно, требуют развития методов работы с аналитическими выражениями на ЭВМ.

В частности в монографиях В.И.Быкова, А.М.Кытманова, М.З.Лазмана приведены многочисленные примеры из химической кинетики, где работают алгоритмы вычисления многомерного логарифмического вычета.

1.2. Цель диссертации

Целью диссертации является:

— разработка алгоритмов исключения неизвестных из систем невырожденных алгебраических уравнений; основанных на формуле многомерного логарифмического вычета;

— получение формул для вычисления степенных сумм для некоторых типов систем мероморфных функций с бесконечным множеством корней, разработка алгоритмов вычисления таких степенных сумм;

— применение найденных формул к нахождению сумм некоторых кратных рядов;

— компьютерная реализация в системах компьютерной алгебры MAPLE и MATEMATИКА полученных алгоритмов.

1.3. Методика исследования

В основу исследования положены методы вычислительной математики, теории функций многих комплексных переменных, компьютерной алгебры.

1.4. Научная новизна

Полученные формулы и алгоритмы являются новыми.

Основные результаты диссертации:

— разработаны алгоритмы исключения неизвестных из систем невырожденных алгебраических уравнений, основанные на формуле многомерного логарифмического вычета;

— доказаны формулы для вычисления степенных сумм для некоторых типов систем мероморфных функций с бесконечным множеством корней, разработаны алгоритмы вычисления таких степенных сумм;

— полученные формулы применены к нахождению сумм некоторых кратных рядов;

— дана компьютерная реализация полученных алгоритмов в системах компьютерной алгебры MAPLE и MATEMATИКА.

1.5. Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на:

— Международной конференции "Математические модели и методы их исследования, (задачи механики сплошной среды, экологии, технологических процессов, экономики) (Красноярск, 1999);

— VIII, IX, XII Международных научно-технических семинарах "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации" (Алушта, 1999, 2000, 2003);

— Международной конференции "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Уфа, 2000);

— Международном конгрессе "Математика в XXI веке. Роль механико-математического факультета НГУ в науке, образовании и бизнесе " (Новосибирск, 2003);

— научном семинаре по теории управления (Москва, МАИ);

— научном семинаре кафедры высшей математики (Красноярск, КрасГУ);

— научном семинаре кафедры прикладной математики (Красноярск, КГТУ);

— научном семинаре кафедры прикладной математики (Красноярск, СГАУ).

1.6. Публикации

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ.

1.7. Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы из 46 наименований; Общее число страниц диссертационной работы — 93.

2. Содержание работы

В первой главе приводятся математические сведения, теоремы и формулы, на которых основана диссертационная работа. Глава состоит из трех параграфов.

Первый параграф содержит теоретические сведения о многомерном логарифмическом вычете, а также формулы для вычисления логарифмического вычета для различных систем нелинейных уравнений;

Во втором параграфе приведены алгоритмы исключения неизвестных. Он содержит классическую схему исключения неизвестных.

Далее рассматривается алгоритм упрощения полиномиальных идеалов — алгоритм Бухбергера. Приведены определения идеала, понятие редукции полиномов, нормальной формы, стандартного базиса (базиса Гребнера), а также алгоритмы приведения множества полиномов к нормальной форме и базису Гребнера. С помощью этого алгоритма также можно свести исходную систему к треугольному виду. Алгоритм Бухбергера используется во второй главе при построении матрицы A— матрицы перехода, которая необходима в процессе вычисления степенных сумм координат корней рассматриваемой системы..

Во втором параграфе также приведен модифицированный метод исключения неизвестных, основанный на формуле многомерного логарифмического вычета.

В третьем параграфе приведен обзор литературы по системам компьютерной алгебры и подробно описаны системы MAPLE и МАТЕМАТИКА, использовавшиеся для компьютерной реализации разработанных в диссертации алгоритмов.

Вторая глава состоит из трех параграфов и посвящена нахождению результанта для невырожденных систем с помощью матрицы перехода.

В четвертом параграфе рассматривается вопрос о нахождении результанта и построении матрицы переходов с помощью базисов Гребнера.

Рассматривается система алгебраических уравнений в С

$$f_j = 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

где f_j — полиномы степени k_j. Пусть $f_j = P_j + Q_j$, где P_j — старшая однородная часть f_j, а степень Q_j строго меньше k_j. Наряду с системой (1), рассматривается система

$$P_j = 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Будем говорить, что система (1) невырождена, если система (2) имеет только одно решение — точку 0. Мы будем иметь дело с многочленами f_j, коэффициенты которых зависят от каких-то параметров. В этом случае, система (1) считается невырожденной, если система (2) имеет одно решение для почти всех значений в пространстве параметров.

Известно, что невырожденные системы вида (1) характеризуются тем, что они имеют в пространстве С" конечное число корней и не имеют корней на бесконечной гиперплоскости П.

Число корней для невырожденных систем дает теорема Безу: число корней (1) с учетом их кратностей равно произведению степеней $k_1 k_2 \cdots k_n$.

Если система вида (1) имеет конечное число корней в CP^n, то дробно — линейным преобразованием она может быть сделана невырожденной, достаточно в CP" бесконечно удаленной плоскостью П сделать гиперплоскость, не содержащую корней системы (1). В CP^n это можно сделать линейным преобразованием, а, следовательно, в С" дробно-линейным. Следовательно, по сути невырожденные системы алгебраических уравнений — это самые общие системы алгебраических уравнений с конечным числом корней.

Основной вопрос данного параграфа — исключение из (1) всех переменных, кроме одного, т.е. нахождение результанта *RES(ZJ)* с помощью, формулы многомерного логарифмического вычета. По теореме Гильберта о корнях найдется матрица (которую назовем матрицей перехода)

$$A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^{n},$$

составленная из однородных полиномов a_{jk}, такая, что

$$z_j^{N_j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(z) P_k(z), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

причем степени N_j можно выбирать, не превосходящие числа $k_1 + k_2 + \cdots + k_n - n$ (по теореме Маколея) Для любого многочлена $R = R(z)$ степени M

$$S_R = \sum_{\substack{k_{s,j} \geq 0 \\ \sum\limits_{s,j=1}^{n} k_{s,j} \leq M}} \frac{(-1)^{\sum\limits_{s,j=1}^{n} k_{s,j}} \prod\limits_{s=1}^{n} (\sum\limits_{j=1}^{n} k_{s,j})!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} (k_{s,j})!} \mathfrak{M} \left[\frac{R Q^{\alpha} \det A \Delta \prod\limits_{s,j=1}^{n} a_{sj}^{k_{s,j}}}{\prod\limits_{j=1}^{n} z_j^{\beta_j N_j + \beta_j + N_j}} \right], \tag{4}$$

где $\alpha_j = \sum\limits_{s=1}^{n} k_{s,j}$, $\beta_s = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{s,j}$, Δ — якобиан системы (1), а $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий многочлену Лорана $\left[\frac{P}{z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}}\right]$ его свободный член. Задаем фиксированный многочлен $R = R(z)$ и вычисляем степенные суммы корней системы (1) $S_R^{(i)} = S_{R^i}$, $i = 1, \ldots, L$, $L = k_1 k_2 \cdots k_n$. Далее вычисляем коэффициенты результанта G_j, $j = 1, \ldots, L$ по рекуррентным формулам Ньютона. Основная проблема в этом методе — нахождение элементов a_{jk} матрицы перехода. Показано, что можно найти линейное представление полиномов базиса Гребнера G через полиномы P_j исходного базиса F (и обратно). Пусть такое представление

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} f_j X_{ji}, \ i = 1 \ldots m \tag{5}$$

найдено. Решим следующую задачу. Даны базис Гребнера $G = g_1 \ldots g_m$ и некоторый полином $f \in Ideal(F)$. Найти такие $h_1 \ldots h_m$, что

$$f = h_1 g_1 + \ldots + h_m g_m.$$

Тогда получим

$$f = h_1 \left(\sum_{j=1}^{l} f_j X_{j1} \right) + \ldots + h_m \left(\sum_{j=1}^{l} f_j X_{jm} \right) = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} h_i X_{jm} \right) f_j. \tag{6}$$

Если выбрать $f = z_j^{N_j+1}$, исходный базис $F = P_1(z) \dots P_n(z)$, $G =$ БГ(F) (базис Гребнера F), тогда элементы матрицы A можно найти как коэффициенты при f_j в представлении (см.выше). Этой проблеме посвящен пятый параграф. Опишем алгоритм вычисления матрицы *A*.

1. Вычисляем *G* — базис Гребнера по алгоритму Бухбергера.

Пусть *gi* G *G*. В процессе вычисления gi строим *S* - полиномы *S{Pi,Pj)* по формуле

$$S(P_i, P_j) = \frac{h}{P_{ip}} P_i - \frac{h}{P_{jp}} P_j,$$

где *Pip*, Pj_p — старшие члены полиномов *Pi, Pj,* которые получаются перемножением всех переменных, каждая в степени, равной максимуму ее степеней в старших мономах и их коэффициентов, *h* — их наименьшее общее кратное. $\frac{h}{P_{ip}}, \frac{h}{P_{jp}}$ — суть мономы, поэтому *S(Pi,Pj)* линейная комбинация полиномов *Pi* и *Pj* с полиномиальными коэффициентами и принадлежит идеалу, порожденному P,- *и Pj.*

Известно, что базис *G* является стандартным тогда и только тогда, когда для любой пары полиномов F и *д* из множества *G* их 5-полином 5(F, *g)* редуцируется к нулю относительно G.

Следовательно, достаточно вычислить все S-полиномы и проверить, что все они редуцируются к нулю. Но если наш базис не стандартный, то это в точности потому, что один из этих *S* - полиномов не редуцируется к нулю. Поскольку его редукция является линейной комбинацией элементов множества G, можно добавить ее к *G,* не изменив при этом порождаемый идеал. После этого добавления *S{f,g)* редуцируется к нулю, но появляются новые *S* - полиномы, которые также нужно рассматривать. Бухбергером: доказано, что этот процесс всегда заканчивается.

При решении нашей задачи в процессе построения S(Pi-,Pj) вычисляем коэффициенты $\frac{h}{P_{kp}}$ и записываем их в память: *это Xji* из (5). Процесс повторяем, пока не получим стандартный базис.

2. Редуцируем по модулю *G* — мономы $z_j^{N_j+1}$ к нулю. Для этого составляем 5-полиномы

$$S(g_i, z_j^{N_j+1}) = \frac{h}{g_{ip}} g_i - \frac{h}{z_j^{N_j+1}} z_j^{N_j+1},$$

где *h* — наименьшее общее кратное (НОК). Затем все $\frac{h}{g_{ip}}$ суммируем. Вычисления проводим до тех пор, пока все 5-полиномы станут равны нулю. Накопленные суммы дадут значения Л,-.

3. Вычисляем $a_{jk}(z) = \sum\limits_{i=1}^{m} h_i^{(k)} X_{ji}$. Очевидно, что на сложность алгоритма влияет порядок выбора пар полиномов, для которых строятся S-полиномы. В данном параграфе рассмотрены некоторые возможности его улучшения.

В пятом параграфе приведен алгоритм нахождения степенных сумм, реализующий формулу 4.

1. Задаем систему алгебраических уравнений :

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ \dots \\ f_n = 0; \end{cases} \tag{7}$$

Где полиномы *fj* имеют вид

$$f_j(z) = \sum_{||\alpha|| \leqslant k_j} c_\alpha^j z^\alpha, \tag{8}$$

а = (ai,...,a$_n$) — мультииндекс, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, а степень полинома $(\deg f_j)$ равна *kj,* т. е. существует коэффициент с$_а$ / 0 с ||a|| = *kj* (здесь и в дальнейшем $||\alpha|| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$.

2. Задаем фиксированный полином *R{z),* например, *z\,* относительно которого будут вычисляться степенные суммы корней.

3. Рассматривая $f_j = P_j + Q_j$, где *Pj* — старшая однородная часть *fj,* а степень Q_j строго меньше *kj,* задаем P_j и Q_j.

4. Вычисляем элементы матрицы А по алгоритму Бухбергера, исходя из соотношения

$$z_j^{k_1+\ldots+k_n-n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(z) P_i, \quad j = 1, \ldots n.$$

5. Вычисляем функционал

$$\mathfrak{M}\left[\frac{RQ^\alpha \det AJ_f \prod\limits_{s,j=1}^{n} a_{s,j}^{k_{s,j}}}{\prod\limits_{j=1}^{n} z_j^{\beta_j N_j + \beta_j + N_j}}\right]. \tag{9}$$

При этом сравниваем степени переменных, стоящих в числителе и в знаменателе выражения, стоящего под знаком функционала. Если эти степени совпадают, то выписываем полученный свободный член.

В силу линейности функционала, сопоставляющего многочлену Лорана его свободный член, степенная сумма *SR* корней системы относительно полинома

$$R = \sum_{||\alpha||=0}^{K} d_\alpha z^\alpha,$$

гдеК*1C*— степень полинома Я, есть

$$S_R = \sum_{||\alpha||=0}^{K} d_\alpha S_\alpha,$$

где $S_\alpha = S_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ — степенная сумма монома z^a. Следовательно, для вычисления *SR* достаточно вычислить S_α, т.е. степенные суммы соответствующих мономов.

б. Полученный свободный член умножаем на константу

$$\frac{(-1)^{\Sigma k_{s,j}} \prod\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{s=1}^{n} k_{s,j}\right)!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} (k_{s,j})!}$$

и суммируем, согласно заданным ограничениям.

В конце параграфа приведено описание MAPLE-программы, реализующей данный алгоритм. В шестом параграфе рассмотрены примеры нахождения матрицы Ли степенных сумм корней систем полиномиальных уравнений.

Работа алгоритма опробована на тестовых примерах (§6).

Третья глава содержит формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций. Эти формулы позволяют найти суммы некоторых двойных рядов, неизвестные ранее.

В седьмом параграфе приводится постановка задачи и необходимые предварительные преобразования.

Рассматривается система функций $f_1(z)$, $f_2(z), \dots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{10}$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \ldots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} a_\alpha^j z^\alpha, \tag{11}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}$.

В дальнейшем считается, что степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в Q_j, строго больше, чем k_j, $j = 1, 2, \dots, n$ ($\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > k_j$).

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

В некоторой достаточно малой окрестности нуля система

$$\begin{cases} f_1(z) = 0, \\ f_2(z) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(z) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

может иметь корни только на координатных плоскостях $\{z : z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Поэтому при достаточно малых r_j, определены интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \int\limits_{\gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \cdots z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1 \geqslant 0$; $\beta_2 \geqslant 0, \dots, \beta_n \geqslant 0$, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, $I = (1, 1, \dots, 1)$. Обозначим

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f}.$$

Заметим, что данный интеграл по виду является многомерным логарифмическим вычетом, но моном в отрицательной степени $\frac{1}{z^{\beta+I}}$ не голоморфен в точке 0. Поэтому общая теорема о логарифмическом вычете к данному интегралу не применима и связь этого интеграла с какими-то степенными суммами корней системы необходимо доказывать.

В восьмом параграфе доказаны основные теоремы третьей главы.

Теорема 8.1. *При сделанных предположениях, для функции fj вида (10), (11) справедливы формулы:*

$$J_\beta = \sum_{||\alpha||\leqslant||\beta||+\min(n,k_1+\ldots+k_n)} \frac{(-1)^{||\alpha||}}{(\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n)!}\times$$

$$\times \frac{\partial^k(\Delta\cdot Q^\alpha)}{\partial z^{\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n}}\bigg|_{z=0} =$$

$$= \sum_{||\alpha||\leqslant||\beta||+\min(n,k_1+\ldots+k_n)} (-1)^{||\alpha||}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\cdot Q^\alpha}{z^{\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n}}\right],$$

где $k=||\beta+(\alpha_1+1)\beta^1+\ldots+(\alpha_n+1)\beta^n||$, $\beta!=\beta_1!\cdot\beta_2!\cdots\beta_n!$, Δ *— якобиан системы (12),* $Q^\alpha=Q_1^{\alpha_1}\cdot Q_2^{\alpha_2}\cdots Q_n^{\alpha_n}$, $\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z^\beta}=\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z_1^{\beta_1}\partial z_2^{\beta_2}\cdots\partial z_n^{\beta_n}}$ *и, наконец,* $\mathfrak{M}$ *— линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.*

Отметим, что в указанные в теореме 8.1 формулы входит лишь конечное число коэффициентов функций $Q_j(z)$.

Следствие 8.1. *Если все* $\beta^j=(0,0,\ldots,0)$, *то интеграл*

$$J_\beta = \sum_{||\alpha||\leqslant||\beta||}(-1)^{||\alpha||}\mathfrak{M}\left[\frac{\Delta\, Q^\alpha}{z^\beta}\right] = \sum_{||\alpha||\leqslant||\beta||}\frac{(-1)^{||\alpha||}}{\beta!}\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z^\beta}(\Delta\, Q^\alpha)\bigg|_{z=0}.$$

Далее рассмотренные интегралы связываются со степенными суммами корней системы (12). Для этого нужно сузить класс функций f_j. Сначала в качестве функций Q_j $(j=1,2,\ldots,n)$ берутся многочлены вида

$$Q_j(z)=\sum_{\alpha\in M_j} a_\alpha^j z^\alpha, \qquad (13)$$

где Mj — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha \in \mathcal{M}_j$ координаты $\alpha_k \leqslant \beta_k^j$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j$. (Но по прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in \mathcal{M}_j$).

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1,\beta_2+1,\ldots,\beta_n+1)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}}.$$

Данное выражение является степенной суммой корней $Z(k)$ системы (12), не лежащих на координатных плоскостях, но в отрицательной степени (либо степенной суммой от обратных величин корней). Число таких корней (с учетом их кратностей) обозначается через M.

Теорема 8.2. *Для системы (12) с многочленами fj вида (10) и многочленами Q_j вида (13) справедливы формулы-*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

т.е.

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{\|\alpha\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_1 + \ldots + k_n)} (-1)^{\|\alpha\|+n} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta \cdot Q^\alpha}{z^{\beta + (\alpha_1+1)\beta^1 + \ldots + (\alpha_n+1)\beta^n}} \right]. \tag{14}$$

В восьмом параграфе рассматривается более общая ситуация. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, разлагающиеся в бесконечные произведения (равномерно и абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$)

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $z^{\beta^j} + Q_j(z)$, а $Q_j(z)$ — функции вида (13).

Для каждого набора индексов $j_1, \ldots, j_n$, где $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \ldots, i_n$, где $i_1, \ldots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \ \ldots, \ f_{nj_n}^{(i_n)}(z) = 0, \tag{16}$$

имеют конечное число корней; не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(l)}, \ldots$. Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{1(l)}| \cdot |z_{2(l)}| \cdots |z_{n(l)}|} \tag{17}$$

сходится.

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}.$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (16), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{js}^{(2)}$; и равен -1, если в систему вида (16), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{js}^{(2)}$.

Ряды, определяющие суммы $\sigma_{\beta+I}$ сходятся, в силу условия, наложенного на ряд (17).

Для системы (12), составленной из функций вида (15), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами).

Теорема 8.3. *Для системы (12) с функциями вида (15) справедливы равенства*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

Отметим, что если $f_j(z)$ являются целыми функциями, разлагающимися в бесконечные произведения, то они сами имеют вид (10) с функциями $Q_j(z)$ вида (11). Поэтому интегралы J_β вычисляются по теореме 8.1.

В девятом параграфе приведены некоторые приложения полученных формул к нахождению сумм двойных рядов.

Рассмотрим ряд

$$\sigma_{\beta_1+1,\beta_2+1} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2(\beta_1+1)}(k^2+m^2)m^{2(\beta_1+1)}}.$$

Представляя его как степенную сумму корней для некоторой системы трансцендентных уравнений, получаем утверждение.

Следствие 9.1. *Справедливы формулы*

$$\sigma_{(2s+1,1)} = \frac{1}{\pi^{2(2s+1)}} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(2s+1)}(m^2+k^2)} =$$

$$= \frac{1}{2} J_{(2s,0)} = \frac{1}{2} \sum_{||\alpha|| \leqslant 2s} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta \cdot Q^{\alpha}}{z_1^{2s}}\right],$$

где А, Q uffl определены в теореме 8.1.

Рассмотрим, например, $I_{(2,0)}$. Вычисления дают. $J_{(2,0)} = \frac{13}{56700}$, а $\sigma_{(3,1)} = \frac{13}{113400}$. Следовательно,

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{k^6(k^2+m^2)} = \frac{13\pi^8}{113400}.$$

В последнем десятом параграфе приведена компьютерная. реализация полученных формул. Описаны алгоритмы, программы, приведены примеры.

Приложения содержат тексты программ.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Потапова З.Е. Применение системы Maple для нахождения результанта системы алгебраических уравнений / З.Е.Потапова// Межвузовский сборник "Комплексный анализ и математическая физика". - Красноярск: КрасГУ. - 1998..-С. 163-169

2. Потапова З.Е. Алгоритм нахождения результанта системы нелинейных алгебраических уравнений с применением систем компьютерной алгебры / З.Е.Потапова З.Е.// Тезисы докладов международной конференции "Математические модели и методы их исследования". - Красноярск: ИВМ СО РАН. -1999. - С. 171-172

3. Потапова З.Е. Алгоритм нахождения результанта системы нелинейных алгебраических уравнений с применением систем компьютерной алгебры / З.Е.Потапова // Сборник трудов VIII международного НТС "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации". - Алушта. - 1999. - С. 394-397.

4. Быков В.И; Применение систем компьютерной алгебры в модифицированном методе исключения неизвестных/ В.И.Быков, А.М.Кытманов, Т.А.Осетрова, З.Е.Потапова// Докл. РАН; - 2000. - Т. 370. - №4. - С. 439-442.

5. Быков В.И. Компьютерная алгебра - многочленов в модифицированном методе исключения неизвестных / В.И.Быков, А.М.Кытманов, Т.А.Осетрова, З.Е.Потапова//Труды межд. конф. "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы". - Т. 4. - Уфа: Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. - 2000. - С. 162-166.

6. Потапова З.Е. Применение алгоритма построения базисов Гребнера в решении системы нелинейных алгебраических уравнений / З.Е.Потапова // Сборник трудов IX международного НТС "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации". - Алушта. - 2000. - С: 102-104.

7. Потапова З.Е. Применение алгоритма построения базисов Гребнера в решении системы нелинейных алгебраических уравнений / З.Е.Потапова; // Сборник трудов XII международного НТС "Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации". - Алушта. - 2003. - С. 102-104.

8. Мысливец С.Г. Формулы для нахождения сумм некоторых двойных рядов / С.Г.Мысливец, З.Е.Потапова // Межвузовский сборник "Вопросы математического анализа". - Красноярск: КрасГТУ. - 2004. - Вып. 7. - С. 54-62.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ № 1212.2003.1.

Потапова

Подписано в печать 14,05 ***2004*** Формат 60x84/16.
Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. ***1.25***
Тираж 100 Заказ, 1*65*

Издательский центр
Красноярского государственного университета
660041 Красноярск, пр. Свободный, 79.