На правах рукописи

УДК 517.5

ШИХШИНАТОВА МУМИНАТ МАГОМЕДРАСУЛОВНА

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ И ИХ СРЕДНИХ ТИПА БАЛЛЕ—ПУССЕНА ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ДИСКРЕТНЫХ СЕТКАХ

Специальность 01.01.01-Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

САРАТОВ 2004

Диссертацонная работа выполнена на кафедре математического анализа Дагестанского государственного педагогического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Идрис Идрисович Шарапудинов.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Сергей Федорович Лукомский,
кандидат физико-математических наук, доцент
Михаил Геннадьевич Плешаков

Ведущая организация: Московский государственный институт электронной техники

Защита диссертации состоится "24" июня 2004 г. в 15 час.-30 мин. на заседании диссертационного Совета К.212.243.02 Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского по адресу: 410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, Саратовский государственный университет.

Автореферат разослан "22" мая 2004 г.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Саратовского государственного университета им.Н.Г.Чернышевского.

Ученый секретарь диссертационного Совета,
кандидат физико-математических ннаук,
доцент В.В.Корнев

Введение

Актуальность темы. Работа посвящена приближению непрерывных функций суммами Фурье и их средними типа Валле-Пуссена по многочленам Чебышева, ортогональным на дискретных сетках.
Теория ортогональных многочленов в последнее время получила интенсивное развитие и нашла многочисленные приложения. В частности, в теоретических и прикладных исследованиях применяются разложения в ряды по ортогональным многочленам. При этом приходится решать следующую промежуточную задачу: для заданной функции $f = f(t)$ из того или иного класса и выбранной ортонормированной системы $\{\varphi_n = \varphi_n(t)\}$ требуется оценить отклонение частичной суммы $S_n(f) = S_n(f,t)$ ряда Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}$ от самой функции f. Эта последняя задача, в свою очередь, приводит к вопросу об оценке функции Лебега для соответствующей системы ортонормированных многочленов. На практике в качестве базисов часто применяются классические многочлены, ортогональные на дискретных сетках; именно идея применения разложений по многочленам, ортогональным на сетках для обработки дискретной информации привела П.Л.Чебышева к созданию общей теории ортогональных многочленов. Однако до недавнего времени вопросы, связанные с аппроксимативными свойствами сумм Фурье по многочленам Чебышева, ортогональным на сетках и, особенно, их средних типа Валле-Пуссена оставались малоисследованными. Это, в первую очередь, было связано с отсутствием исследований по изучению асимптотических свойств самих многочленов Чебышева, ортогональных на дискретных сетках. Целенаправленное изучение асимптотических свойств указанных многочленов было

начато в работах Шарапудинова И.И., в которых в отдельных случаях получены окончательные результаты и, как следствие, в этих частных случаях решена задача о поведении фупкции Лебега соответствующих сумм Фурье-Чебышева и их средних типа Балле-Пуссена.

Объект исследования. В работе исследуется поведение функции Лебега для дискретных сумм Фурье по мпогочленам Чебышева ортогональным па равномерной сетке и их средних типа Валле-Пуссена.

Цель работы. 1. Оценить функцию Лебега дискретных сумм Фурье-Чебышева.

2. Исследовать вопрос об ограниченности норм операторов Балле-Пуссена $V_{n,m}^{\alpha,\beta}(f)$ для сумм Фурье-Чебышева.

Общие методы исследования. В диссертации применяются общие методы теории функций и функционального анализа, а также методы теории ортогональных многочленов.

Научная новизна. Исследованы аппроксимативные свойства сумм Фурье по многочленам Чебышева, образующим ортонормированную систему на конечной равномерной сетке. Получены оценки функции Лебега указанных сумм, которые **в** определенном смысле носят неулучшаемый характер (по порядку). С некоторыми ограничениями доказано, что нормы операторов Валле-Пуссена $V_{n,m}^{\alpha,\beta}(f)$ для сумм Фурье-Чебышева равномерно ограничены в пространстве $C_{[-1,1]}$.

Практическая цепность Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в некоторых вопросах теории приближений и численного анализа.

Апробирование работы. Основные положения и отдельные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

-на научных семинарах кафедры математического анализа Дагестанского государственного педагогического университета (ДГПУ);
-на 12-ой Саратовской математической школе (2002 г.);
-на 13-ой Саратовской математической школе (2004 г.);
-на конференции профессорско-преподавательского состава **ДГПУ** (2003 **г.)**

Публикации.» Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Обьем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 105 страницах компьютерного набора и состоит из введения, 2 глав и списка литературы, включающего 34 наименований.

Краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена исследованию аппроксимативных свойств сумм Фурье по многочленам Чебышева, образующим ортонормированную систему на конечной равномерной сетке. Получены оценки Функции Лебега указанных сумм, которые в определенном смысле носят неулучшаемый характер (по порядку). Рассмотрим некоторые обозначения и факты, связанные с ортогональными многочленами Чебышева дискретной переменной.

Пусть $\alpha, \beta > -1$, N–натуральное число, $N \geq 2$. Обозначим через $T_n^{\alpha,\beta}(x, N)$, $(0 \leq n \leq N-1)$ многочлены Чебышева образующие ортогональную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \mu(x, \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(N-x+\alpha)\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)},$$

то есть

$$\sum_{x\in\Omega_N} \mu(x) T_n^{\alpha,\beta}(x,N) T_m^{\alpha,\beta}(x,N) = \delta_{nm} h_{n,N}^{\alpha,\beta}, \qquad (1)$$

где $\Gamma(z)$-гамма функция Эйлера,

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta} = \frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)},$$

δ_{nm}-символ Кронекера.

Как показано в работе Шарапудинова И.И. для многочленов Чебышева $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ с целыми α и β ограничение $n = O(\sqrt{N})$ является своего рода "водоразделом" для асимптотического поведения в следующем смысле:

если $n \le a\sqrt{N}$ $(a > 0)$, то для $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ справедлива такая же весовая оценка, что и для многочленов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, причем равномерно относительно n, где $0 \le n \le a\sqrt{N}$ $(N \to \infty)$, $a > 0$;

если же $\frac{n^2}{N} \to \infty$, то такой оценки нет.

Для многочленов Чебышева $T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ с дробными α и β асимптотические оценки получены в работе Шарапудинова И.И. при условии $n = O(N^{\frac{1}{3}})$.

Пусть j_1 и j_2-целые числа и $0 \le j_1, j_2 \le N-1$, $\alpha,\beta > -1$, $-1 \le x \le 1$, $1 \le n \le aN^{\frac{1}{3}}$, $(a > 0)$, тогда

$$\left| T_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+x) - j_1, N - j_2\right]\right| \le$$

$$\le cn^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\right]^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left[(1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

где $c = c(\alpha, \beta, j_1, j_2, a)$. Для $q > 0$, $a > 0, 1 \le n \le aN^{\frac{1}{2}}$ справедливы неравенства

$$|T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)| \le c(\alpha,\beta,a,q)n^{\alpha} \quad (|1-x| \le qn^{-2}),$$

$$|T_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)| \le c(\alpha,\beta,a,q)n^{\beta} \quad (|1+x| \le qn^{-2}). \tag{3}$$

Будем рассматривать многочлены

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N) = \left\{h_{n,N}^{\alpha,\beta}\right\}^{-\frac{1}{2}} T_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (0 \le n \le N-1), (\alpha,\beta > -1),$$

образующие ортонормированную систему на указанной сетке Ω_N с весом $\mu(x)$, то есть

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu(x)\tau_n^{\alpha,\beta}(x)\tau_m^{\alpha,\beta}(x) = \delta_{n,m}.$$

Пусть

$$\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}\left[\frac{N-1}{2}(1+x), N\right],\ 0 \le n \le N-1,$$

тогда справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j)\tau_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\tau_{m,N}^{\alpha,\beta}(x_j) = \delta_{n,m}, \tag{3}$$

где

$$\rho(x_j) = \mu\left[\frac{N-1}{2}(1+x), \alpha, \beta\right],\ x_j = -1 + \frac{2j}{N-1},\ j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Пусть $f \in C_{[-1,1]}$, где $C_{[-1,1]}$–пространство непрерывных функций $f(x)$, заданных на [-1,1]. Сумму Фурье–Чебышева по системе $\{\tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ обозначим через

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x),\ n \leqslant N-1,$$

где

$$\hat{f}_k = \hat{f}^k(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\rho(x_j)\tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j). \quad (4)$$

Пусть $P_n(f) = P_n(f, x)$-алгебраический полином наилучшего приближения к функции $f \in C_{[-1,1]}$, $E_n(f) = \|f - P_n(f,x)\|$, тогда, если $n \leqslant N - 1$, то имеем:

$$|f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)| \leqslant E_n(f)\left[1 + \mathfrak{L}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)\right],$$

где

$$\mathfrak{L}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(x_j)\left|\sum_{k=0}^{n} \tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\tau_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\right| \quad (5)$$

-функция Лебега для дискретных сумм Фурье-Чебышева.

В первой главе получена оценка весовой функции $\rho(x)$.

Лемма 1.3.1 Пусть $\alpha, \beta > -1$–произвольные действительные числа и $-1 \leq x \leq 1$. Тогда имеет место оценка
:

$$\rho(x) \leq c(\alpha,\beta)\frac{1}{N-1}\left(1 - x + \frac{2}{N-1}\right)^{\alpha}\left(1 + x + \frac{2}{N-1}\right)^{\beta}.$$

Положим

$$W_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \max_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k+1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{k+1}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}|T_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)|,$$

$$\hat{W}_{n,N}^{\alpha+1,\beta}(x) = \max_{0\leq k\leq n}(k+1)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x} + \frac{1}{k+1}\right)^{\alpha+\frac{3}{2}} \times$$

$$\times\left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{k+1}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}|\hat{T}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)|,$$

где

$$\hat{T}^{\alpha,\beta}_{k,N}(x) = T^{\alpha,\beta}_{k}\left(\frac{N-1}{2}(1+x), N-1\right).$$

$$\|W^{\alpha,\beta}_{n,N}\| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|W^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)|,$$

Из весовых оценок (2) и (3) непосредственно вытекает, что если $n \leq aN^{\frac{1}{3}}$, то найдутся положительные постоянные $c = c(\alpha,\beta,a)$,

$$\|W^{\alpha,\beta}_{n,N}\| \leq c(\alpha,\beta,a), \quad \|\hat{W}^{\alpha+1,\beta}_{n,N}\| \leq c(\alpha,\beta,a). \tag{6}$$

Основным результатом первой главы является следующая

Теорема 1.4.1 Пусть $\alpha,\beta > -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a > 0$, $n \leqslant aN^{\frac{1}{3}}$, $x = \cos\varphi$, $\varepsilon(\alpha) = 0$, если $\alpha = 1/2$, $\varepsilon(\alpha) = 1/2$, если $\alpha \neq 1/2, c = c(\alpha,\beta,a)$. Тогда справедлива следующая оценка функции Лебега $\mathfrak{L}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)$ сумм Фурье–Чебышева.

$$\mathfrak{L}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x) \leqslant c\|\hat{W}^{\alpha+1,\beta}_{n,N}\|\,\|W^{\alpha,\beta}_{n,N}\|\left[\ln(n\varphi^{2\varepsilon(\alpha)}+1)+1\right]$$
$$+cn^{\frac{1}{2}}\left[\left(\|W^{\alpha,\beta}_{n,N}\| + \|\hat{W}^{\alpha+1,\beta}_{n,N}\|\right)|T^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)| + \|W^{\alpha,\beta}_{n,N}\|\,|T^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)|\right],$$

В случае, когда $n = aN^{\frac{1}{3}}$ из (6) и теоремы 1.4.1 выводится

Следствие 1.4.1. *Пусть $\alpha,\beta > -\frac{1}{2}, -1 \leq x \leq 1$, $0 \leq n \leq aN^{\frac{1}{3}}$. Тогда найдется постоянная $c = c(\alpha,\beta,a)$, для которой*

$$\mathfrak{L}^{\alpha,\beta}_{n,N}(x) \leq c(\alpha,\beta,a)\left[(\ln(n\varphi^{2\varepsilon(\alpha)}+1)+1) + n^{\frac{1}{2}}\left(|T^{\alpha,\beta}_{n,N}(x)| + |T^{\alpha,\beta}_{n+1,N}(x)|\right)\right].$$

Во **второй главе** в качестве аппарата приближения непрерывных функций рассматриваются средние типа Валле–Пуссена

$$V^{\alpha,\beta}_{n,m}(f,x) = V^{\alpha,\beta}_{n,m,N}(x) = \frac{1}{m+1}\left[S^{\alpha,\beta}_{n,N}(f,x) + \cdots + S^{\alpha,\beta}_{n+m,N}(f,x)\right] \tag{7}$$

для сумм Фурье $S^{\alpha,\beta}_{k,N}(f,x)$ по многочленам Чебышева $\tau^{\alpha,\beta}_{k,N}(x)$, образующим ортонормированную систему на равномерной сетке
$\left\{x_j = -1 + \frac{2j}{N-1}\right\}_{j=0}^{N-1}$.
Равенство (7) можно переписать в следующем виде

$$V^{\alpha,\beta}_{n,m}(f,x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\rho(x_j)\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n+m} D^{\alpha,\beta}_{k,N}(x,x_j) \qquad (8)$$

где

$$D^{\alpha,\beta}_{k,N}(x,y) = \sum_{l=0}^{k} \tau^{\alpha,\beta}_{l,N}(x)\tau^{\alpha,\beta}_{l,N}(y).$$

Так как (4) и (7) следует, что $V^{\alpha,\beta}_{n,m}(P_n(f),x) = P_n(f,x)$, то нетрудно показать

$$|f(x) - V^{\alpha,\beta}_{n,m}(f,x)| \le E_n(f) + |V^{\alpha,\beta}_{n,m}(P_n(f) - f,x)|. \qquad (9)$$

С другой стороны, из (8) находим

$$|V^{\alpha,\beta}_{n,m}(P_n(f) - f,x)| \le E_n(f)\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{N-1}\rho(x_j)\sum_{k=n}^{n+m}|D^{\alpha,\beta}_{k,N}(x,x_j)|.$$

Сопоставляя (7), (8) и (9) получим

$$|f(x) - V^{\alpha,\beta}_{n,m}(f,x)| \le E_n(f)\left[1 + \|V^{\alpha,\beta}_{n,m}(x)\|\right]. \qquad (10)$$

Таким образом задача об оценке отклонения средних типа Валле-Пусена $V^{\alpha,\beta}_{n,m}(f,x)$ функции f по системе $\{\tau^{\alpha,\beta}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции $f \in C_{[-1,1]}$, в случае когда $x \in [-1,1]$ сводится к задаче об оценке величины $\|V^{\alpha,\beta}_{n,m}(x)\|$
Во второй главе показано, что при определенных условиях на параметры, задающие весовую функцию, средние Валле–Пуссена для сумм

Фурье $S_{k,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ равномерно ограничены на $[-1,1]$ как семейство линейных операторов действующих в пространстве $C_{[-1,1]}$.

Вначале главы установлен вспомогательный результат, представляющий собой аналог формулы Кристоффеля–Дарбу для сумм вида

$$\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(N-1)^{[k]}}{(N+k+\alpha+\beta+1)^{[k]}}\frac{k+1}{2}T_{k,N}^{\alpha+1,\beta}(y)T_{k,N}^{\alpha,\beta+1}(x),$$

а именно доказана

Лемма 2.2.1. *Пусть $\alpha,\beta>-1$, тогда*

$$(y-x)\sum_{k=0}^{\nu}\frac{4(N-1)^{[k]}}{(N+k+\alpha+\beta+1)^{[k]}}\frac{k+1}{2}T_k^{\alpha+1,\beta}(y,N)T_k^{\alpha,\beta+1}(x,N)=$$

$$=\frac{(\nu+1)(\nu+\alpha+\beta+2)(N-\nu-1)(N-1)^{[\nu]}}{(2\nu+\alpha+\beta+3)(N+\nu+\alpha+\beta+1)^{[\nu]}}\times$$

$$\times\left[T_{\nu+1}^{\alpha+1,\beta}(y,N)T_\nu^{\alpha,\beta+1}(x,N)-T_{\nu+1}^{\alpha,\beta+1}(x,N)T_\nu^{\alpha+1,\beta}(y,N)\right]-$$

$$-\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(N-1)^{[k]}}{(N+k+\alpha+\beta+1)^{[k]}}\left[\frac{(N-1)(\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+3)}+\right.$$

$$\left.+(\alpha+\beta)(y-x)-\frac{2k(k+\alpha+\beta+2)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+3)}\right]\times$$

$$\times T_k^{\alpha+1,\beta}(y,N)T_k^{\alpha,\beta+1}(x,N)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(N-1)^{[k]}}{(2k+\alpha+\beta+1)(N+k+\alpha+\beta)^{[k-1]}} \times$$

$$\times \left[(\alpha+1)\beta T_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(y,N) T_k^{\alpha,\beta+1}(x,N) - \alpha(\beta+1) T_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(x,N) T_k^{\alpha+1,\beta}(y,N)\right]$$

Основным результатом этой главы является следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть* $-1 < \alpha,\ \beta \leqslant 0$, a, b, d *— положительные числа* $(a \leqslant b)$, $1 \leqslant n \leqslant dN^{\frac{1}{3}}$. *Тогда средние Валле–Пуссена* $V_{n,m}^{\alpha,\beta} = V_{n,m}^{\alpha,\beta}(f)$ *равномерно относительно* $a \leqslant \dfrac{m}{n} \leqslant b$ *ограничены как линейные операторы, действующие в пространстве* $C[-1,1]$.

Выводятся следствия

Следствие 2.3.1. *Пусть* $-1 < \alpha, \beta \leqslant 0$, a, b, d *— положительные числа,* $1 \leqslant n \leqslant d\sqrt[3]{N}$, $E_n(f)$ *— наилучшее приближение функции* $f \in C[-1,1]$, тогда

$$|f(x) - V_{n,m,N}^{\alpha,\beta}(f,x)| \leqslant C(\alpha,\beta,a,b,d) E_n(f).$$

Следствие 2.3.2. *Пусть* $1 \leqslant n \leqslant d\sqrt[3]{N}$, $c = c(d)$, *где* $d > 0$, *тогда*

$$1 \leqslant \nu(n,N) \leqslant c.$$

Здесь $\nu(n,N) = \sup\limits_{Q_n \neq 0} \dfrac{\|Q_n\|}{\|Q_n\|_N}$, *где верхняя грань берется по всем алгебраическим многочленам* Q_n *степени* $n \leqslant N-1$, *не равным нулю тождественно.*

Следствие 2.3.3. *Пусть $f \in C[-1,1]$, $E_n(f)$ — наименьшее уклонение функции f от алгебраических многочленов степени n, P_n — произвольный многочлен степени n. Тогда, если $n \leqslant d\sqrt[3]{N}$, то найдется такая постоянная $c(d)$,* что

$$\|f - P_n\| \leqslant (1+c)E_n(f) + c\|f - P_n\|_N,$$

где $\|f\| = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$, а $\|f\|_N = \max\limits_{j\in\Omega} |f(x_j)|$,

$x_j = -1 + \frac{2j}{N-1}$, $\Omega = \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Перечень публикаций автора по теме диссертации

1.Шихшинатова М.М. Оценка функции Лебега дискретных сумм Фурье– Чебышева // Тез.докл. 11-ой Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения".Саратов: изд-во СГУ, 2002, с. 230–231.

2. Шихшинатова М.М. Об ограниченности средних Валле–Пуссена для сумм Фурье–Чебышева //Тез. докл. 12-ой Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения".Саратов: изд-во СГУ, 2004, с. 207–208.

3. Шихшинатова М.М. Оценка функции Лебега дискретных сумм Фурье– Чебышева //Вестник Дагестанского научного центра РАН. N 12, 2002, с. 17–24.

Сдано в набор 7 05.04,1/16, Печать офсетная.
Бумага офсетная. Усл. печл - 1
Заказ № 015. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Типографии «Радуга-1»
г. Махачкала, ул. Коркмасова На

№ - 9938